



ICME 11 Mexico 2008

11th International Congress on Mathematical Education

Cálculo de una variable: acercamientos newtoniano y leibniziano integrados didácticamente

Juan Antonio Alanís
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey (México)
juan.antonio.alanis@itesm.mx

Cálculo de una variable: acercamientos newtoniano y leibniziano integrados didácticamente.

Juan Antonio Alanís

Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey (México)

juan.antonio.alanis@itesm.mx

Resumen. En este trabajo se presenta una propuesta sobre qué enseñar en un curso de cálculo de una variable. Con ella se pretende mejorar la enseñanza de esta rama de las matemáticas incorporando, en la matemática escolar, ideas que llevaron a Newton y Leibniz a la creación de sus respectivos cálculos, ideas que han estado ausentes en la enseñanza tradicional. Esta propuesta ha sido diseñada acorde con una visión de las matemáticas más amplia que la que ha predominado en la enseñanza en por lo menos las últimas cuatro décadas.

Palabras Clave: Cálculo, enseñanza y visión de las matemáticas.

Introducción

La enseñanza de las matemáticas ha presentado a esta ciencia ya como un sistema conceptual lógicamente estructurado o ya como un lenguaje formal. Se ha supuesto que el estudiante entiende un concepto con sólo darle su definición en términos de otros conceptos previamente definidos; que el estudiante comprende un resultado al presentarle su “demostración” (su deducción lógica a partir de otros resultados previamente demostrados) y, que tal entendimiento y tal comprensión le permitirá aplicar las matemáticas... todos los datos empíricos disponibles contradicen este supuesto (Gascón, 2001).

La matemática es ante todo una actividad humana involucrada en la resolución de problemas; problemas que se pueden referir al mundo natural y social o bien pueden ser internos a la propia matemática; como respuesta o solución a estos problemas externos o internos surgen y evolucionan progresivamente los objetos matemáticos: procedimientos, conceptos y teorías. Así, por una parte, si bien es cierto que las matemáticas es un lenguaje, éste no es a priori, sino que se ha construido para comunicar los problemas y sus soluciones; y, por otra parte, si bien las matemáticas son un sistema conceptual lógicamente estructurado, tal sistema emerge de la actividad de matematización (Godino, 2003).

Acorde con lo dicho en el párrafo anterior la propuesta que aquí se presenta está vertebrada por un conjunto de problemas que al ser abordados por los estudiantes favorecerá el que emerjan y evolucionen los procedimientos y conceptos sobre los cuales finalmente el cálculo logró estructurarse.

Históricamente los problemas que condujeron al surgimiento y desarrollo del cálculo fueron los problemas geométricos de determinar la recta tangente a una curva, el cálculo del área de una región y el cálculo del volumen de un sólido, los problemas de máximos y mínimos y los problemas relativos al cambio de las magnitudes continuas; desde luego habrá que agregar a estos problemas a aquellos que condujeron al desarrollo de una teoría formal de límites en el siglo

XIX, teoría que constituyó el fundamento de uno de los acercamientos con el que fueron abordados los problemas antes mencionados (Kaput, 1994).

Se dice uno de los acercamientos porque tales problemas fueron abordados por Newton y Leibniz con ideas y estilos distintos, dando lugar a dos acercamientos distintos: el cálculo newtoniano y cálculo leibniziano. Tal distinción es hecha por el mismo Newton cuando en su “De cuadratura curvarum” declara (Alanís 1996, p 46):

“No considero a las magnitudes matemáticas como formadas por partes, por pequeñas que sean, sino descritas por un movimiento continuo. Las líneas son descritas y engendradas, no por yuxtaposición de sus partes, sino por el movimiento continuo de puntos; las superficies por el movimiento de líneas; los sólidos por el movimiento de superficie; los ángulos por la rotación de sus lados; los tiempos por un fluir constante...”

En la propuesta que aquí se presenta, de qué enseñar en un curso de cálculo de una variable, se entenderá por versión newtoniana aquella que se desarrolla tomando como práctica el predecir el valor de una magnitud que está cambiando respecto de otra, cuando se conoce la razón con la cual está cambiando o bien cuando se conoce como está relacionada con sus sucesivas razones de cambio; y, por versión leibniziana, aquella que se desarrolla tomando como práctica el cuantificar una cualidad de un todo dividiéndolo en un número infinito de partes infinitamente pequeñas para las cuales se puede cuantificar la cualidad en cuestión.

Si bien cierto que cada una de estas dos versiones se puede desarrollar independientemente una de la otra, en cuanto a dar solución a los problemas antes señalados, la propuesta que aquí se presenta integra ambas versiones a fin de aprovechar las bondades de una ante las limitaciones de la otra.

Antes de pasar a describir la propuesta es importante señalar que quienes participaron en su construcción, al igual que otros matemáticos educativos, consideran que las causas de los nada halagadores resultados de la enseñanza tradicional de las matemáticas, no son sólo de carácter psico-pedagógico, sino también de carácter epistemológico. En tal sentido, consideran “fundamental problematizar el propio conocimiento matemático; es decir no considerarlo como transparente” (Contreras y Ordóñez 2006, p 67). Sin embargo, cabe observar que dicha propuesta está enmarcada en la aproximación socioepistemológica a la investigación en matemática educativa al atender a una epistemología de las prácticas más que de los conceptos (Cantoral y Farfán 2003).

La propuesta

Como ya se dijo, acorde a la visión de la matemática que considera a esta ciencia esencialmente como una actividad humana involucrada en la resolución de problemas, la propuesta está vertebrada por un conjunto de problemas. Se empezará por describir la estructura global de la propuesta.

La propuesta está “dividida” en dos grandes partes. En términos generales, se puede decir que cada parte aborda sustancialmente una de las versiones, si a caso con ciertos elementos de la otra para potenciar su efectividad. Ambas partes tienen la misma estructura: tres módulos (Los problemas, Esbozo de la Teoría y Aplicaciones) que hacen alusión al surgimiento y evolución de los contenidos.

a) Primera parte (acercamiento newtoniano)

Los problemas, primer módulo de esta primera parte, ha sido desarrollado de acuerdo con las implicaciones didácticas del análisis epistemológico realizado en (Alanís, 1996). Así, este módulo quedó dividido en los siguientes apartados: Cambio uniforme, Cálculo aproximado del cambio acumulado, Cálculo exacto del cambio acumulado, Estudio cualitativo del cambio y Método de Euler.

Antes de describir el tipo de problemas que vertebran a este primer módulo según estos apartados, se recuerda que la versión newtoniana se desarrolla al ir construyendo una respuesta cada vez más elaborada a la pregunta ¿cuál va a ser el valor de una magnitud que está cambiando?

Los primeros problemas que abordarán los estudiantes son aquellos que propician la construcción de la respuesta a esa pregunta en el caso en el que la magnitud cambia a razón constante respecto de otra magnitud.

En un segundo conjunto de problemas los estudiantes usan una idea (la de suponer que en pequeños intervalos la razón con la cual cambia una magnitud es constante) para construir un procedimiento para calcular aproximadamente lo que cambia una magnitud cuando la razón con la cual cambia no es constante.

En un tercer conjunto de problemas los estudiantes observarán que con el procedimiento anterior y una nueva manera de pensar es posible, en ciertos casos, calcular el valor exacto de lo que cambia una magnitud cuando la razón con la cual cambia respecto a otra no es constante. En particular, dicho cálculo exacto es posible realizarse cuando la razón de cambio está dada por una función potencia multiplicada por una constante. Más aun, en contextos apropiados, los estudiantes podrán determinar el valor de una magnitud que está cambiando cuando la razón con la cual cambia está dada por una función polinomial y de hecho podrán observar que la función “predictora” es también una función polinomial.

En un cuarto conjunto de problemas, los estudiantes reconocerán de facto las relaciones entre una magnitud que está cambiando y la razón con la cual está cambiando; por ejemplo, si la razón con la cual cambia una magnitud es positiva, entonces la magnitud está creciendo. Tal reconocimiento posibilitará un estudio “exhaustivo” de las magnitudes, de momento para aquellas cuya función predictora es una función polinomial.

En un quinto y último conjunto de problemas que vertebran el módulo uno de la versión newtoniana, los estudiantes usarán el método de Euler para calcular aproximadamente lo que cambia una magnitud cuando no se conoce explícitamente su razón de cambio, pero se conoce como está relacionada la magnitud con sus sucesivas razones de cambio. En este apartado

aparecen la función exponencial y la función seno. La primera como respuesta al problema de predecir el valor de una magnitud que está cambiando de tal manera que su razón de cambio es proporcional a la magnitud; y, la segunda como respuesta al problema de predecir el valor de una magnitud que está cambiando de tal manera que su segunda razón de cambio es proporcional a la magnitud.

En el Esbozo de la teoría, segundo módulo de esta primera parte de la propuesta, se conceptualiza la derivada de una función como la precisión y formalización de la noción razón instantánea de cambio, noción cuyo trato intuitivo fue suficiente para desarrollar el primer módulo tal y como se acaba de describir.

Los apartados de este segundo módulo coinciden en nombre, mas no como son desarrollados, con las secciones en que los libros tradicionales de cálculo dividen el capítulo donde tratan a la derivada.

Se destaca el hecho de que en este módulo se incorporan los diferenciales, cantidades infinitamente pequeñas ausentes en la enseñanza tradicional del cálculo. Si bien es cierto (Keisler, 2000) que se puede dar un trato formal y riguroso a estas cantidades, en esta propuesta se hará un trato más laxo de este tipo de números; bastará aceptar su existencia, operarlos algebraicamente como se operan los números ordinarios y eliminar de una expresión polinomial en un diferencial aquellos términos de grado mayor o igual a dos. Estos supuestos están en conformidad con la idea de Leibniz (Kleiner, 2001) de ver a las curvas como polígonos de un número infinito de lados infinitamente pequeños.

En principio se llega a la definición de derivada como un límite, pero pronto se sustituye esta definición por aquella que rescata el significado de la derivada como un cociente de diferenciales; esto permitirá establecer con mucha mayor fluidez las reglas para derivar y los teoremas básicos sobre derivadas.

En las aplicaciones, tercer y último módulo de esta primera parte de la propuesta, se abordan el tipo de problemas del primer módulo pero contándose ya con herramientas explícitas para ello. Cabe resaltar que el conjunto de magnitudes para las cuales se puede calcular el valor exacto de lo que cambian, se amplía grandemente al conjunto de magnitudes para las cuales se puede obtener una antiderivada de la función que da cuenta de su razón de cambio.

En (Salinas, Alanís y otros, 2002) se presenta con lujo de detalle esta primera parte de la propuesta correspondiente a la versión newtoniana ampliada con ciertos elementos leibnizianos.

b) Segunda parte (acercamiento leibniziano)

Los problemas, primer módulo de esta segunda parte, ha sido desarrollado de acuerdo con la observación didáctica hecha por Kleiner (2001) cuando se refiere a la invención del cálculo por parte de Newton y Leibniz. Así, este módulo quedó dividido en los siguientes apartados: Longitud de arco, Áreas de regiones planas, Volúmenes de sólidos de revolución, Masa de una varilla y Fuerza hidrostática.

Estos apartados dan cuenta del número de ejemplos y la variedad de contextos con los que se pretende que los estudiantes logren comprender la conceptualización de la integral definida de una función. Para este fin, los textos tradicionales de cálculo presentan a lo más dos ejemplos: el cálculo de áreas de regiones planas y el cálculo de la distancia recorrida por un objeto cuando se conoce la velocidad con la cual se está moviendo.

Esta propuesta difiere de las tradicionales no sólo por el mayor número de ejemplos que usa para conceptualizar la integral, sino también por la manera como son abordados dichos ejemplos.

A continuación se ilustra la idea con la que, en esta propuesta, son resueltos esos problemas, tomando como ejemplo el cálculo del área de una región debajo de la gráfica de una función (continua) y sobre un intervalo.

La región se divide, apropiadamente, en n partes. Lo apropiado, en primer lugar, es en el sentido de que se pueda calcular para cada una de las n partes un valor aproximado de su área, y con ello poder calcular un valor aproximado del área de toda la región al sumar las áreas aproximadas de las partes en que fue dividida. En segundo lugar, lo apropiado es en el sentido de que a medida que n va siendo cada vez grande, las aproximaciones de las áreas de las partes y, consecuentemente la de toda la región, van siendo cada vez más precisas. Y, en tercer lugar, lo apropiado es en el sentido de pensar que el valor exacto del área de la región es el número al que tienden las aproximaciones cuando n tiende a infinito.

Una manera de lograr lo anterior es dividiendo el intervalo sobre el que está la región en n subintervalos de igual longitud, y para cada subintervalo considerar la parte de la región que está sobre él y bajo la gráfica de la función. En este caso, cuando los subintervalos son “suficientemente” pequeños, lo cual se logra con n “suficientemente” grande, las partes de la región que ellos determinan parecen trapecios y el parecido es cada vez mayor a medida de que n va siendo cada vez más y más grande.

Aun y cuando, con lo ya dicho, se nota una diferencia con la enseñanza tradicional de la integral, no se ha dicho todavía aquello que da cuenta de la diferencia fundamental, cosa que se hará a continuación.

Siguiendo con el ejemplo del cálculo del área de una región debajo de la gráfica de una función (continua) y sobre un intervalo, otra manera de obtener la exactitud de ese cálculo es la siguiente: divídase, “apropiadamente”, la región en un número infinito de partes infinitamente pequeñas, lo apropiado es, ahora, en el sentido de que se pueda calcular el valor exacto de las áreas de cada una de las partes y, consecuentemente, al sumar estas áreas obtener el valor exacto del área de toda la región.

De igual manera, lo anterior se logra dividiendo el intervalo sobre el que está la región en un infinito de subintervalos de igual longitud (consecuentemente infinitamente pequeños) y para cada subintervalo considerar la parte de la región que está sobre él y bajo la gráfica de la función. En este caso, las partes de la región determinados por los subintervalos son trapecios, ya que siguiendo a Leibniz, trozos infinitamente pequeños de “curvas” son segmentos de rectas.

Pero, finalmente, ¿cómo se calculará el valor exacto del área de la región, si ello implica sumar un número infinito de sumandos infinitamente pequeños? Es aquí donde se recurrirá a elementos de la versión newtoniana, para hacer más efectiva la leibniziana, al menos como se están desarrollando en esta propuesta.

Si el área A de una región bajo la gráfica de una función no negativa $y = f(x)$ se visualiza como una magnitud que está cambiando respecto a la magnitud (variable) x , esto es, $A = A(x)$, entonces el área de la región R debajo de la gráfica de $f(x)$ y sobre el intervalo $[a;b]$ no es otra cosa que lo que cambia la magnitud A en el intervalo $[a;b]$. Como ya se dijo en la descripción de la versión newtoniana, el valor exacto de ese cambio se puede obtener si se conoce y se puede obtener una antiderivada de la razón con la cual cambia A respecto a x , $A'(x)$.

Ahora bien, resulta que las áreas de los trapecios infinitamente pequeños en los que se divide R para calcular su área, no son otra cosa que los cambios infinitamente pequeños que experimenta A en los subintervalos de x correspondientes. Y, como se puede probar, usando las reglas estipuladas para los diferenciales, que las áreas de esos trapecios son “iguales” a la de los rectángulos con base en los correspondientes subintervalos y altura igual al valor de la función en cualquiera de los extremos de esos subintervalos, se concluye que $A'(x) = f(x)$.

Así, el cálculo exacto del área de la región R debajo de la gráfica de $f(x)$ y sobre el intervalo $[a;b]$ queda garantizado si se puede obtener una antiderivada $F(x)$ de $f(x)$. Finalmente este cálculo exacto simbólicamente se expresa así:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Cabe observar que el miembro de la izquierda de la anterior ecuación simboliza una suma infinita de cantidades infinitamente pequeñas.

Como se dijo, con esta misma idea son abordados todos los problemas del primer módulo de esta segunda parte de la propuesta. Con ello se pretende que los estudiantes puedan resolver por propia cuenta nuevos problemas en los que dicha idea se puede poner en juego, lo cual harán en el tercer módulo: Las aplicaciones.

Desde luego, el que los estudiantes apliquen el procedimiento con el cual se abordaron los problemas del primer modulo, depende en parte de la familiaridad que tengan de los contextos en los que se presentan los nuevos problemas. Cabe señalar, que en implementaciones de la propuesta se ha logrado que estudiantes establezcan por propia cuenta la integral con la cual calcular el área superficial de un sólido de revolución, lo cual es difícil o imposible de lograr en los cursos tradicionales en los que la integral se define de entrada a través de las sumas de Riemann (Pulido, 1997).

Para finalizar diremos que es, precisamente, Pulido (1997) quien ha establecido los lineamientos para desarrollar esta versión leibniziana del cálculo, que en esta propuesta se presenta integrada, con fines didácticos, a la versión newtoniana.

Comentario final

En realidad, como suele suceder casi con cualquier cosa, la propuesta que se acaba de describir no está completa. Está en un proceso de desarrollo continuo enriquecido por lecturas de trabajos de colegas de distintas partes del mundo, los que aquí se citan son tan sólo unos cuantos de los que directa o indirectamente han contribuido a su actual construcción.

Esta propuesta se ha querido presentar en el Topic Study Group 16 (Research and development in the teaching and learning of calculus) con la esperanza de recibir retroalimentación de los participantes a tan importante reunión, no precisamente durante la misma sino en futuras ocasiones en las que se pueda discutir con mayor detalle; o, mejor aún, de que algunos colegas se interesen en realizar investigaciones encaminadas directamente a enriquecerla. Tales investigaciones tendrían la virtud de ser explicadas por un todo y, dialécticamente, contribuir a la explicación de ese todo.

Bibliografía

- Alanís, J. A. (1996) “La predicción: un hilo conductor para el rediseño de un del discurso escolar del cálculo”, Tesis Doctoral, Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN, México.
- Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Mathematics Education: A vision of its evolution. *Educational Studies in Mathematics*. 53 (3), 255 – 270.
- Contreras, A. y Ordóñez, L. (2006). Complejidad ontosemiótica de un texto sobre la introducción a la integral definida. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 9(1), 65-84.
- Gascón, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 6(1), 129-159.
- Godino, J. D. (2003) “Teoría de las funciones semióticas: un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática”, Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, España.
- Kaput, J. (1994). Democratizing access to calculus: New routes to old roots. In *Mathematical thinking and problem solving*. Ed. A. Schoenfeld. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum. Pp.77-156.
- Keisler, J. H. (2000) “Elementary Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Mathematics Education: A vision of its evolution. *Educational Studies in Mathematics*. 53 (3), 255 – 270.calculus: an infinitesimal approach”, <http://www.infinitesimals.com/>, October 2007.
- Kleiner, I. (2003). History of the infinitely small and the infinitely large in calculus. *Educational Studies in Mathematics*. 48 (2-3), 137 – 174.

Pulido, R. (1997) “Un estudio teórico de la articulación del saber matemático en el discurso escolar: la trasposición didáctica del diferencial en la física y matemática”, Tesis Doctoral, Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN, México.

Salinas N., Alanís J. A. y otros, Elementos del cálculo: reconstrucción conceptual para el aprendizaje y la enseñanza, Editorial Trillas, 2002.