



**ICME 11** Mexico 2008

*11th International Congress on Mathematical Education*

## **Actualizando el Cálculo Infinitesimal**

**Ismael Arcos**

**Universidad Autónoma del Estado de México (México)**

[ismael\\_arcos@msn.com](mailto:ismael_arcos@msn.com)

**Eugenio Díaz Barriga**

**Universidad Autónoma del Estado de México (México)**

[eugeniux@fi.uaemex.mx](mailto:eugeniux@fi.uaemex.mx)

**Sara Vera**

**Universidad Autónoma del Estado de México (México)**

[sara.vera@gmail.com](mailto:sara.vera@gmail.com)

## ACTUALIZANDO EL CÁLCULO INFINITESIMAL

Arcos, Ismael ([ismael\\_arcos@msn.com](mailto:ismael_arcos@msn.com))

Díaz Barriga, Eugenio ([eugenix@fi.uaemex.mx](mailto:eugenix@fi.uaemex.mx))

Vera, Sara ([sara.vera@gmail.com](mailto:sara.vera@gmail.com))

Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma del Estado de México

### INTRODUCCIÓN

En su excelente obra: *¿Qué son las matemáticas?* (1941), Courant y Robbins indican que «las “diferenciales” como cantidades infinitamente pequeñas están ahora descartadas definitiva y deshonrosamente...», sin embargo, en la edición revisada de la misma (1996), Ian Stewart nos dice que tal indicación es una reflexión precisa del punto de vista que se tenía por consenso cuando se escribió la obra, y añade que «A pesar del veredicto de Courant y Robbins, siempre ha habido algo intuitivo y llamativo en los argumentos a la antigua con infinitesimales. Están aún sumergidos en nuestro lenguaje en ideas tales como “instantes” de tiempo, velocidades “instantáneas” y el considerar una curva como una serie de líneas rectas infinitamente pequeñas y el área acotada por una curva como suma de una cantidad infinita de áreas de rectángulos infinitesimales. Este tipo de intuición resulta estar justificado, pues se ha descubierto recientemente que el concepto de cantidades infinitamente pequeñas no es deshonroso y no tiene por qué ser descartado. Es posible establecer un marco riguroso para el análisis en el que las definiciones weierstressianas en términos de  $\epsilon$  y  $\delta$  sean reemplazadas por enunciados sobre infinitesimales, que son increíblemente similares a las ideas intuitivas de Leibniz, Newton y Cauchy».

Ahora bien, resulta indudable que esa presentación del cálculo en las aulas, en la que el concepto fundamental es el de límite, resulta poco accesible para la mayoría de los estudiantes, tanto en el bachillerato como en las escuelas de ingeniería, sin embargo, y a pesar del atinado señalamiento de Stewart sobre la justificación del uso de los infinitamente pequeños, es esa presentación basada en el límite la que se sigue dando en las aulas. Por otro lado, se ha señalado desde hace un par de décadas (por ejemplo, Grattan-Guinness, 1991), y cómo se puede constatar en los libros de texto (Arcos, 2000) el cálculo que se emplea en los cursos de ciencias básicas y de la ingeniería parece más próximo a las ideas de Leibniz, Newton y Euler, que al basado en la definición rigurosa de límite.

Por lo anterior es que, desde hace unos diez años se ha venido trabajando, en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma del Estado de México (FIUAEM), en una propuesta para la enseñanza del cálculo en la que los infinitamente pequeños sean utilizados, y en la que la concepción de diferencial como incremento infinitamente pequeño de una variable recupere la importancia que tenía en los orígenes del cálculo. Cabe mencionar que no se busca implementar un curso de análisis no estándar, ya que muy probablemente resultaría todavía más difícil de comprender que el basado en el concepto de límite. Más bien se trata de utilizar aquellos viejos conceptos que nos ayuden a simplificar y volver más atractivos para los alumnos los conceptos del cálculo.

Así pues, se propone un curso en el que se recuperen aquellas ideas propias de los orígenes del cálculo, aprovechando los recursos de los que disponemos actualmente. Particularmente podemos aprovechar los recursos tecnológicos para graficar, evaluar funciones, realizar operaciones aritméticas con rapidez y precisión, e incluso realizar procesos simbólicos. También podemos utilizar con mucho provecho el simbolismo matemático actual y la poderosa herramienta de los vectores.

En este documento se hará referencia principalmente al recurso de la tecnología como una herramienta para la visualización.

### ARCOS, CUERDAS Y TANGENTES

Tal vez la idea infinitesimalista más simple y provechosa en el cálculo, desde sus orígenes, es la que resulta de concebir una curva como constituida por una infinidad de segmentos rectilíneos, cada uno de ellos de longitud infinitamente pequeña. En el caso de la circunferencia esa idea puede visualizarse al inscribir (o circunscribir) un polígono regular con un número grande de lados.

Como se observa en la figura 1, no se requiere de un número muy grande de lados para que, a la vista, el polígono se confunda con la curva. Al pasar de la figura a la aritmética, se requiere de valores en verdad grandes para que se deje de distinguir el polígono de la curva. Por ejemplo, el área del polígono regular de  $n$  lados, inscrito en la circunferencia unitaria, está dado por  $A_n = \frac{n}{2} \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi}{n} \right)$ , y se requiere que de un polígono de 10000 lados para obtener  $A_{10000} \cong 3.14159$ , que es el valor de  $\pi$  con 6 cifras significativas.

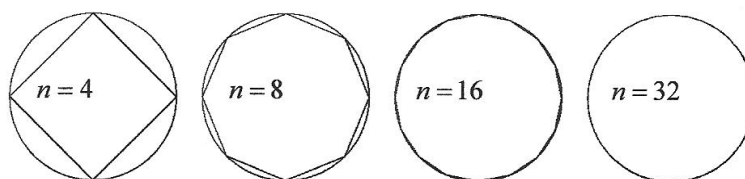


Fig. 1

A partir de esta idea podemos afirmar que la cuerda que une dos puntos de una curva, infinitamente próximos entre sí, coincide con el arco mismo, por lo que puede usarse cualquiera de ellas en lugar de la otra, a condición de que los puntos extremos estén infinitamente cerca. De hecho, siguiendo a Newton podemos ir más lejos aún, indicando que “si un punto  $Q$  se mueve sobre una curva, aproximándose a un punto fijo  $P$ , también de la curva, la recta tangente a la curva en el punto  $P$ , y el arco y el segmento que unen a  $P$  y a  $Q$ , terminarán por confundirse en un solo segmento”. En otras palabras, la razón entre (las longitudes de) los segmentos tangente y cuerda y del arco correspondiente, tiene como límite a la unidad.

En la figura 2 se ilustra esta proposición. En el lado izquierdo se muestra la parte de la gráfica de  $y = \operatorname{sen} x$ , correspondiente a  $x \in [0, 2]$ , lo mismo que el punto  $P = (1, \operatorname{sen} 1)$ . Además se muestra un punto  $Q$ , también de la curva, pero en diferentes posiciones, “moviéndose” hacia  $P$  si se ve la figura de arriba hacia abajo.

La diferencia entre las abscisas de  $P$  y  $Q$  es  $\Delta x$ , de manera que las coordenadas de  $Q$  son  $(1 + \Delta x, \operatorname{sen}(1 + \Delta x))$ . Los casos mostrados corresponden, respectivamente, a  $\Delta x = 0.5$ ,  $\Delta x = 0.25$ ,  $\Delta x = 0.125$  y  $\Delta x = 0.03125$ .

En cada caso se trazó la cuerda  $PQ$  y la parte  $PT$  de la recta tangente a la curva en  $P$ . Además se trazó el rectángulo definido por esta porción de la recta tangente. Esa región rectangular es la que se muestra ampliada del lado derecho.

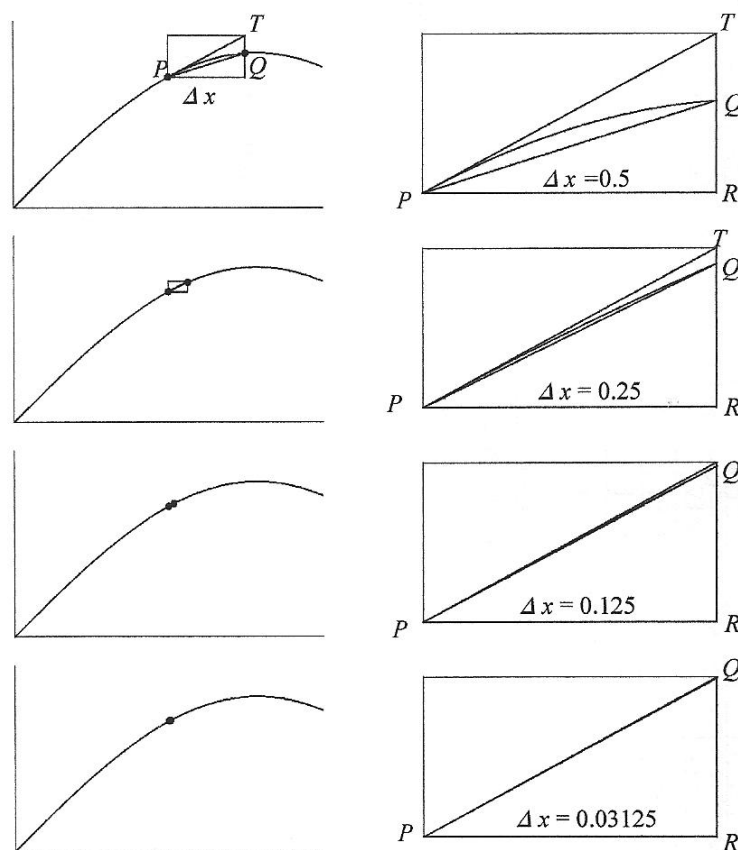


Fig. 2

Podemos observar que, como indicaba Newton, conforme  $Q$  se aproxima a  $P$ , queda cada vez más próximo de  $T$ , de manera que la cuerda y el arco  $PQ$  terminan por confundirse con la tangente  $PT$ . Es decir:

Si  $Q$  es un punto infinitamente próximo a  $P$ , siendo ambos puntos de una misma curva, entonces la cuerda  $PQ$ , el arco  $PQ$ , y la porción recta tangente a la curva en el punto  $P$ , situada por encima (o por debajo) del segmento  $PQ$ , son la misma cosa, así que una de ellas puede ser sustituida por cualquiera de las otras.

#### DIFERENCIALES EN CURVAS EN EL PLANO

La aplicación de la concepción infinitesimalista de las curvas, junto con algunas reglas para operar con cantidades finitas e infinitesimales, así como la concepción de diferencial como una variación infinitesimal de una variable y de integración como la operación inversa a la diferenciación, permiten obtener con relativa facilidad expresiones para las diferenciales de las principales características geométricas, relacionadas con las curvas en el plano.

Por ejemplo, supongamos que una partícula se mueve en el plano de manera que describe la curva  $OPW$ , según se muestra en la figura 3. Supongamos, además, que durante un intervalo de tiempo infinitamente pequeño, la partícula se mueve sobre la curva (con una velocidad finita) desde el punto  $P$  al  $Q$ , que, por lo tanto, serán dos puntos infinitamente próximos entre sí.

Podemos observar que mientras eso ocurre, la abscisa ( $x = OE$ ) del punto tiene un incremento (infinitesimal)  $EE'$ , así que  $dx = EE' = PT$ . Análogamente, la ordenada ( $y = OB$ ) del punto tiene un incremento  $BB'$ , es decir,  $dy = BB' = TQ$ .

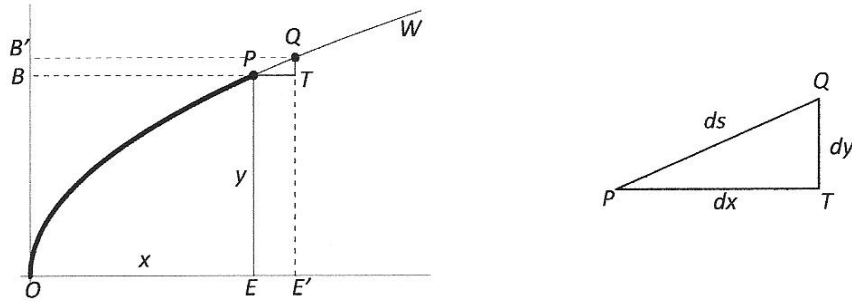


Fig. 3

También podemos ver que el arco  $OP$  de la curva (indicado por un trazo más grueso en la figura 3, izquierda) tiene como incremento al arco  $PQ = ds$ . Sin embargo, debido a que estos puntos están infinitamente próximos entre sí, el arco se puede sustituir por la cuerda, que es la hipotenusa del triángulo rectángulo  $PTQ$  (figura 3, derecha).

Ahora bien, para dicho triángulo rectángulo tenemos que  $PQ^2 = PT^2 + QT^2$ , pero  $PQ = ds$ ,  $PT = dx$  y  $QT = dy$ , por lo tanto, el incremento infinitesimal o *elemento* de arco, será:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

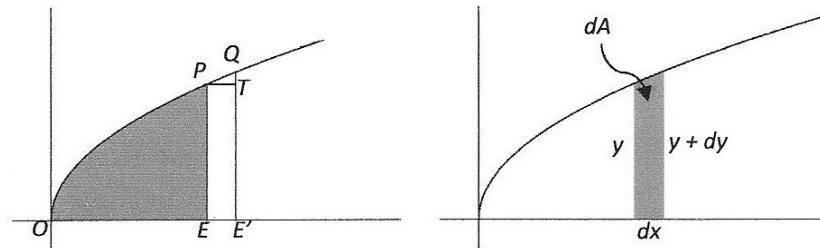


Fig. 4

Por otra parte, si consideramos el *área bajo la curva* (figura 4, izquierda), esto es, en el área de la región encerrada por la curva, el eje X y una perpendicular a dicho eje, tenemos que ésta será el área de la región  $OEP$ , cuando la partícula se encuentra en  $P$ , y el área de la región  $OE'Q$ , cuando la partícula se encuentra en  $Q$ , de manera que el

incremento de esta área, correspondiente al movimiento de la partícula de  $P$  a  $Q$ , será el área del trapecio  $EE'QP$ , es decir (ver figura 4, derecha):

$$dA = \text{área del trapecio } EE'QP = \frac{1}{2}(y + y + dy) dx = \frac{1}{2}(2y + dy) dx$$

Es decir:

$$dA = y dx$$

Cabe mencionar que la manera en la que por lo general se procede en los textos de ciencias básicas y de la ingeniería, cuando se utiliza la integral para realizar un cálculo, es como se ha hecho aquí, que es como procedían Leibniz y sus seguidores desde finales del siglo XVII.

Por otra parte, cuando las dos variables coordenadas, en un sistema rectangular,  $x$  y  $y$ , tienen incrementos infinitesimales  $dx$  y  $dy$ , respectivamente, se genera un rectángulo infinitesimal en el plano, cuya área será  $dA = dx dy$ , análogamente, cuando las variables coordenadas  $\theta$  y  $r$ , de un sistema polar, tienen incrementos infinitesimales  $d\theta$  y  $dr$ , respectivamente, se genera también un rectángulo, ya que el arco  $PT$  (figura 5), por ser infinitesimal, es parte de la recta tangente a la circunferencia (centro en el origen, de radio  $r$ ) y, por lo tanto, perpendicular a  $dr$ . El área de ese rectángulo es:

$$dA = r dr d\theta$$

Por otra parte, al moverse un punto de  $P$  a  $Q$ , recorre un arco de longitud es:

$$ds = \sqrt{(r d\theta)^2 + dr^2}$$

Si el movimiento tiene lugar a lo largo de una curva definida mediante  $r = g(\theta)$ , entonces  $dr = r' d\theta$ , así que:

$$ds = \sqrt{(r d\theta)^2 + r'^2 d\theta^2} = \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta$$

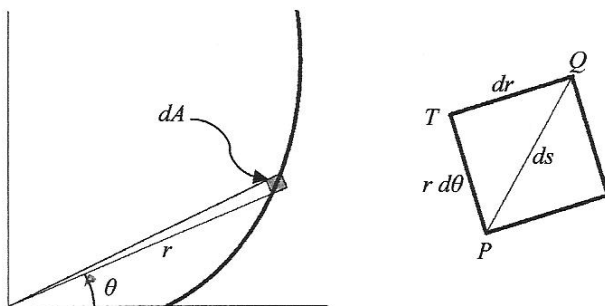


Fig. 5

### Diferencial de área en coordenadas curvilíneas

Los ejemplos anteriores corresponden a expresiones obtenidas desde los orígenes del cálculo. Para terminar vamos a ver el caso de la diferencial del área, para un sistema general de coordenadas curvilíneas (no necesariamente ortogonales).

Así pues, supóngase una transformación  $T$ , en el plano, definida por  $(x, y) = T(u, v)$ , y supóngase que, al tener las variables  $u$  y  $v$ , incrementos infinitesimales (es decir,

diferenciales)  $du$  y  $dv$ , respectivamente, las correspondientes variaciones de  $x$  y  $y$  son, respectivamente,  $dx$  y  $dy$ .

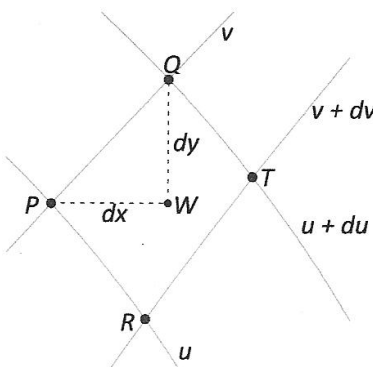


Fig. 6

Con tales suposiciones (ver figura 6), cuando  $u$  cambia su valor a  $u + du$ , permaneciendo constante  $v$ ,  $P$  se mueve hacia  $Q$ . Tomando en cuenta que  $x$  y  $y$  funciones de  $u$  y  $v$ , tenemos que el desplazamiento de  $P$  a  $Q$  estará dado por el vector:

$$\overline{PQ} = \overline{PW} + \overline{WQ} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} = \left( \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \right) \mathbf{j}$$

$$\overline{PQ} = \left( \frac{\partial x}{\partial u} du \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial y}{\partial u} du \right) \mathbf{j}$$

Análogamente, cuando  $v$  cambia su valor a  $v + dv$ , permaneciendo constante  $u$ ,  $P$  se mueve hacia  $R$ , y entonces tenemos:

$$\overline{PR} = \left( \frac{\partial x}{\partial v} dv \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial y}{\partial v} dv \right) \mathbf{j}$$

De esa manera, y considerando los pares de  $u$ -curvas y  $v$ -curvas como dos pares de rectas paralelas (la dirección del gradiente tendrá variaciones infinitesimales y por lo tanto, despreciables en una región infinitesimal), la variación del área de una región en el plano, correspondiente a variaciones infinitesimales  $du$  y  $dv$  de las variables coordenadas, estará dada por:

$$dA = \|\overline{PQ} \times \overline{PR}\| = \left\| \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial u} du \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial y}{\partial u} du \right) \mathbf{j} \right] \times \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial v} dv \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial y}{\partial v} dv \right) \mathbf{j} \right] \right\|$$

$$dA = \left| \left( \frac{\partial x}{\partial u} du \right) \left( \frac{\partial y}{\partial v} dv \right) - \left( \frac{\partial y}{\partial u} du \right) \left( \frac{\partial x}{\partial v} dv \right) \right| = \left| \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right| du dv$$

Expresión equivalente a la conocida:

$$dA = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du dv$$

### Bibliografía

- Arcos, I. (2000); *Acerca de la enseñanza del cálculo en escuelas de ingeniería. Un acercamiento infinitesimalista*. Tesis doctoral. CINVESTAV-IPN, México.
- Courant R., Robbins, H. (2002); *¿Qué son las matemáticas?*, edición revisada, con prefacio y *Avances recientes* de Ian Stewart, traducida al castellano por Martín Manrique, Fondo de Cultura económica, México.
- Grattan-Guinness, I. (1991), "¿Qué es y qué debería ser el cálculo?", *MATHESIS*, Vol. VII, No. 3, UNAM, México.