ICME 11 Mexico 2008
11th International Congress on Mathematical Education

Construcción del punto de inflexión como objeto escolar; estudio socioepistemológico a la obra de L'Hospital y Agnesi

Apolo Castañeda Alonso

CICATA – IPN (México)

apcastane@gmail.com

Construcción del punto de inflexión como objeto escolar; estudio socioepistemológico a la obra de L'Hospital y Agnesi.

Apolo Castañeda Alonso
CICATA-IPN[1]

Los trabajos de investigación de Cantoral, 2000; Valero, 2000; Muñoz, 2000 han documentado ampliamente que el estudio de la derivada se ha visto favorecido por un tratamiento algorítmico, enfatizando el dominio de técnicas y rutinas sobre la capacidad de análisis y predicción en situaciones de variación y cambio y la adquisición de habilidades como las aproximaciones numéricas, interpretación de estados, graficación de funciones (Dreyfus, 1990).

Artigue, (1995) comenta que si bien se puede enseñar a los estudiantes a realizar de forma más o menos mecánica algunos cálculos de la derivada, se encuentran en serias dificultades cuando se les cuestiona sobre conceptos y métodos. Reporta además que la enseñanza tiende a centrarse a una práctica algorítmica y algebraica del cálculo, evaluándose aquello que los estudiantes pueden hacer mejor, y esto a su vez es considerado por los estudiantes como lo esencial, ya que es lo que se evalúa en sus cursos y exámenes.

El trabajo de González, (1998) profundizó sobre la naturaleza escolar de la derivada, explicando que su estudio no puede limitarse a su definición, pues sustenta la idea de que la derivada adquiere sentido cuando se coordinan las *derivadas* que le suceden, es decir, la noción de derivada sucesiva le da significado a la *derivada*. Esto se logra atendiendo a sus propiedades y favoreciendo estrategias de análisis para lograr el tránsito entre una y otra, desarrollando habilidades para la predicción de comportamiento gráficos, etc.

Este argumento emana de las reflexiones epistemológicas de Bos, (1974), donde muestra el intrincado proceso por el cual se establece y construye la derivada como objeto matemático. Sin embargo, es dentro del programa de investigación Pensamiento y Lenguaje Variacional (Cantoral R. et al, 2000; Cantoral, R., 1997a; Cantoral R., 1987, Cantoral R. y Farfán R., 1998; Farfán R., 1993; Farfán R. 1997; Pulido, 1997) cuando se formula la tesis orientada a la didáctica del cálculo la cual sostiene que *la noción de derivada no puede construirse sino hasta después de haberse construido la idea de derivada sucesiva.*

Así, el argumento de *tránsito* entre las derivadas, se considera como el soporte conceptual para el estudio del concepto de *derivada*, sin embargo, y tal como lo ha advertido González, (1998) debido a que el estudio de la derivada se ha visto favorecida por la algoritmia, esta noción de *tránsito* más bien se asume como práctica *reiterativa o recursiva*. El trabajo de Valero, (2000) ha documentado ampliamente esta problemática, mostrando que en los escenarios escolares, el estudio de la *derivada* es reducida a un *algoritmo de cuatro pasos*, y es usual que la derivada sea considerada como una nueva

[1] Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional. México.

función *susceptible a derivarse,* sin necesidad de establecer el tránsito entre una y otra.

Retomando el trabajo que desarrolló Valero, implementamos la secuencia didáctica que construyó para el estudio de la noción de derivada con el objetivo de obtener información referente a las ideas que tienen profesores de matemáticas de nivel medio superior (con estudiantes de entre 15 y 18 años) en torno a la derivada y las derivadas sucesivas. El grupo elegido para reproducir la experiencia estuvo compuesto por 25 profesores de nivel medio superior los cuales asistían a reuniones de trabajo para analizar diferentes aspectos de su actividad docente. Las preguntas que se les plantearon vinculaban los comportamientos de la función con su derivada, como por ejemplo; elegir de entre un grupo de gráficas $f(x)$, las que cumplan con la condición $f''(x)$.

Pero particularmente se puso énfasis en recoger opiniones e interpretaciones sobre la formulación: *$f''(x)=0$, entonces $f(x)$ tiene un punto de inflexión en x.* Un cuarto de los entrevistados confirmaron la veracidad de la expresión y justificaron con casos como: *si $f(x)=x^2$, entonces $f'(x)=2x$* y *$f''(x)=2$, entonces se cumple*

En una primera aproximación, el problema parecería resolverse con advertir que la condición de $f''(a) = 0$ *no* garantiza que en *a* exista un punto de inflexión en la función primitiva. Sin embargo esta afirmación es recurrente aún cuando la mayoría de los libros de cálculo señalan esta situación; … *para que "a" sea punto de inflexión de una función f, es necesario que f '' tenga signos diferentes a la izquierda y a la derecha de "a".* (Spivak, 1992). En muchos casos esta explicación pasa desapercibida, a consecuencia de prácticas escolares que enfatizan el proceso de derivación más que a la inflexión misma.

Usualmente en los libros de texto, el punto de inflexión adquiere sentido e importancia hasta después de estudiar el tema de las derivadas sucesivas, específicamente cuando se presenta *a escena* el método de derivación. Una vez que se puede obtener la derivada y la derivada de la deriva, es entonces cuando se da paso a explicar "la principal aplicación de las segundas derivadas". En este sentido, el punto de inflexión aparece como *legitimador* en el estudio de las segundas derivadas.

En el caso de la obra de Granville, el punto de inflexión se presenta desde cuatro formas distintas, las cuales *evolucionan* hasta que finalmente la definición importante (en términos de su uso y aplicación) se enuncia a través de una serie de pasos para el cálculo algebraico.

Referente: *Geométrico – Visual* Argumento: *Cambio de concavidad* Criterio: *Cambio de forma*	*Un punto de inflexión en una curva es el que separa arcos que tienen su concavidad en sentidos opuestos*

Referente: *Geométrico – Analítico* Argumento: *Posición de la tangente sobre la curva* Criterio: *Lugar en donde la tangente cruza la curva*	*(3) El lector debe observar que cerca de un punto donde la curva es cóncava hacia arriba la curva está arriba de la tangente, y en un punto donde la curva es cóncava hacia abajo (como en C) la curva está*

	debajo de la tangente. El punto de inflexión (como en B), es evidente que la tangente atraviesa la curva.

Referente: *Analítico* Argumento: *Cambio de signo de la segunda derivada* Criterio: *Si cambia de positivo a negativo y viceversa*	***... la segunda derivada cambiará de signo en ese punto****, y si es continua debe anularse ... luego se verifica la siguiente igualdad:* *En puntos de inflexión, f''(x) = 0*

Referente: *Algebraico* Argumento: *Regla de los cuatro pasos* Criterio: *condición de la segunda derivada*	*Primer paso. Se halla f''(x)* *Segundo paso. Se iguala a cero f''(x), se iguala la ecuación resultante y se consideran las raíces reales de la ecuación.* *Tercer paso: Se calcula f''(x), primero para valores de, x menores, después un poco mayores, que cada una de las raíces obtenidas en el segundo paso. Si f''(x) cambia de signo, tenemos un punto de inflexión.*

Estas problemáticas que se han detallado, ponen de manifiesto la necesidad de analizar al punto de inflexión desde los aspectos conceptuales que le caracterizan así como conocer su origen y construcción como objeto escolar, con el objetivo de proponer una reconstrucción de su actual tratamiento escolar; generando actividades o situaciones que favorezca el desarrollo de una idea más robusta acerca del punto de inflexión y por otro lado que permitan fortalecer el argumento de tránsito entre las derivadas.

En este sentido, usamos a la socioepistemológica que nos permite, entre otras cosas, identificar la naturaleza conceptual de los objetos matemáticos, las distintas caracterizaciones –en los distintos momentos de su desarrollo- así como las condiciones sociales y culturales que permitieron su origen (Cantoral, 2000). Esta perspectiva de investigación, sensible a reconocer, que las variables sociales juegan un papel importante en la construcción de un conocimiento (Cantoral & Farfán, 1998), responde además, preguntas relativas de la "vida" de un conocimiento matemático; aspectos de su origen, su naturaleza matemática, su evolución entre otros. Identifica otros aspectos –propios de la actividad humana– que participan en la construcción del conocimiento, tales como las prácticas socialmente compartidas y cosmogonías (Cantoral, 1998).

La socioepistemología, o *epistemología de las prácticas* problematiza el origen del conocimiento a partir de dos componentes básicas de análisis; el referido a su construcción social y las prácticas asociadas. Esto le permite ofrecer explicaciones de las circunstancias socioculturales por las se generan, formulan, validan y difunden las ideas matemáticas. En esta perspectiva, la variable sociocultural aporta explicaciones sobre la génesis de los contextos de significación y las manifestaciones de ideas *germinales* socialmente compartidas que en conjunto motivan el surgimiento de los objetos matemáticos.

La investigación centró la atención en conocer los mecanismos por los que se *definió* la idea de punto de inflexión al seno del discurso escolar del cálculo (en aquella época, discurso para la difusión), considerando que el origen del concepto de punto de inflexión es previo al cálculo Leibniziano. Por ello se destacó la importancia de caracterizar la forma en que L'Hospital y Agnesi usan esta idea en sus obras, las diferentes formas de definirlo en los varios escenarios, las prácticas asociadas y los métodos para su estudio. El objetivo es el reconocimiento y búsqueda del origen didáctico del punto de inflexión, analizándolo integrado como componente del primer discurso escolar del cálculo. Eventualmente esto permitirá hacer un ejercicio de resignificación del concepto de punto de inflexión.

La metodología de investigación que responde ampliamente a esta búsqueda es la *sociepistemología*, a través de la cual se ha manifestado la posibilidad de rediseñar aspectos específicos de la matemática escolar del nivel superior (Cantoral, 1990; Cordero, 1994; Farfán, 1993; Farfán, 1997a) a través de la construcción y experimentación de actividades de clase, que estén mejor adaptadas a una situación escolar y permitan la incorporación de diversas prácticas que conformen un acercamiento amplio al estudio de la matemática.

Esta posibilidad de incidir en el discurso escolar y afectarlo benéficamente es el argumento principal de la tesis. Ubicamos entonces al punto de inflexión alojado dentro de este discurso y reconocemos que tienen un tratamiento escolar limitado a las situaciones en las que es necesario *aplicar* las segundas derivadas.

Formación de un discurso escolar del punto de inflexión

El discurso matemático que aparece en las obras de L'Hospital y Agnesi se distingue del trabajo de Leibniz al reconocer que las ideas del cálculo se abordan de forma distinta. La divulgación del saber atiende a intereses diferentes, cambia su intencionalidad y se reconstruye el discurso generando un programa de estudio para aquellos interesados en abordar el *nuevo cálculo.* Este nuevo sentido se advierte en la introducción de la obra de Agnesi, que explica la intención al abordar las ideas de forma clara y accesible ...*doto de claridad apropiada y simplicidad... que los beneficios con ese orden natural que proporciona, quizás el de mejor instrucción y agrandar más la luz.* Este novedoso tratamiento del cálculo, al que hemos denominado *discurso escolar del cálculo*, ubica a las obras de L'Hospital y Agnesi como los primeros *libros escolares* del cálculo. En ellos las ideas matemáticas se presentada en capítulos y se enuncian definiciones, proposiciones y postulados en cada apartado. El discurso está construido para abordar los conceptos a través de múltiples explicaciones, y por primera vez, se incluye un apartado para tratar problemas relacionados en los contenidos abordados. La intención de L'Hospital no era el repetir el discurso erudito de Leibniz, sino movilizar al lector a través del planteamiento, en un primer momento, de ejemplos que ilustraran las ideas del nuevo cálculo, después, como Agnesi lo muestra, con problemas de aplicación a situaciones específicas de la geometría euclidiana.

Uno de los argumentos del nuevo cálculo, es aceptar la existencia de las cantidades infinitamente pequeñas y no sólo eso, además poder compararlas en órdenes de magnitud y poder hablar del infinito de los infinitamente pequeños. Es de suponer que para la época estas ideas causaran impacto pues se requería pensar sobre supuestos o actos metafísicos de fe, sin embargo, detrás de todo esto existe el argumento analítico de suponer que un hecho complejo puede ser descompuestos en fenómenos simples para su estudio y ese es una de las explicaciones que L'Hospital hace en el prefacio de su obra con respecto a las líneas curvas; *…sólo un análisis de la naturaleza podría conducirnos hasta los verdaderos principios de las líneas curvas. Pues las curvas, al ser poligonales de una infinidad de lados, y al diferir entre ellas sólo por la diferencia de los ángulos que estos lados infinitamente pequeños forman entre sí, al análisis de los infinitamente pequeños únicamente corresponde determinar la posición de los lados para determinar la curvatura que ellos forman...* (en Cambray, 1998).

Notamos entonces que el discurso del cálculo se argumenta y se explica desde la geometría, pero esto tiene que ver con el propio origen epistemológico del cálculo. Desde mediados del siglo XVII el desarrollo de la geometría analítica (o método de coordenadas) permitió plantear problemas relacionados con las curvas, por ejemplo de tangentes, máximos y mínimos e incluso de integración como los planteados por Cavalieri o Toricelli.

El cálculo desarrolló un nuevo método general para abordar todos estos problemas por lo que se percibió inmediatamente como una nueva herramienta para resolver viejos problemas. El discurso de L'Hospital incorporó naturalmente a la geometría a través del planteamiento de los viejos problemas pero además funcionó como método ilustrativo.

Planteamos así la primera hipótesis; el estudio de las curvas es anterior a la formulación del cálculo y en el momento en el que el cálculo surge como una poderosa herramienta tiene sus primeras aplicaciones para esos viejos problemas. Entonces las curvas son las que se problematizan y el cálculo (entendido como un nuevo método) afronta las problemáticas. En esta perspectiva, son preexistentes las ideas de mínimo al cálculo al igual que la de máximo, tangente o punto de inflexión porque están en las curvas y no se problematizan desde el *nuevo cálculo*. El punto de inflexión existe como cualidad en las curvas por lo que al pensar en su resignificación habrá que argumentarlo desde la geometría.

El escenario que L'Hospital describe en el prefacio de su obra, muestra el nuevo paradigma del pensamiento que él mismo y los académicos de su época afrontan; en principio una crítica sobre el conocimiento griego casi perpetuo durante toda la edad media, con acercamientos muy próximos a la superstición y el respeto de alguna divinidad, dice él; *todos los trabajos de varios siglos han conducido a llenar el mundo de comentarios respetuosos y de traducciones repetidas de originales a menudo demasiado detestables* (Cambray, 1998). Pero dice L'Hospital acerca de Descartes; *la valentía para abandonar a los antiguos*, sus trabajos (sobre análisis y geometría) contribuyeron en encontrar la solución a una cantidad enorme de problemas *entonces fue que se abrieron los ojos y se corrió el riesgo de pensar*.

Este nuevo pensamiento caracterizó una época en la que se produjo un renacimiento de las ciencias, al mismo tiempo que se creó una conciencia de la importancia de la divulgación del conocimiento. En el seno de la Academia de Ciencias las reflexiones de Fontenelle (cuya obra *Entretiens sur la pluralité des mondes* (1686) alcanzó más de cien años de vigencia)[2] construyeron un ambiente en el que las obras de difusión del conocimiento, como la de L'Hospital y Agnesi, fueron acogidas con interés, así la obra de Agnesi fue considerada por la *Academia* como una obra de trascendencia.

Con estas condiciones favorables para la difusión de la ciencia, se hizo propicia la *publicación* como medio para la *comunicación* de las ideas. Bajo la perspectiva socioepistemológica se plantea la segunda hipótesis del trabajo: la formulación del discurso escolar del cálculo no sólo proviene de la transposición didáctica del saber erudito sino que se involucran otros factores, diferentes a la noosfera, para la selección y conformación de un saber a enseñar; entre ellas las prácticas socialmente compartidas que se toman en cuenta para adaptar un saber a su versión "didáctica" permitiendo que un mayor número de personas lo puedan estudiar.

El nuevo paradigma de la difusión de la ciencia y el interés por mostrar un nuevo método general para el estudio de las curvas, crearon un escenario propicio para la publicación de *Analyse des Infiniment petits.* Sin embargo no se asumió el ejercicio de la *difusión* como la reimpresión y publicación a gran escala de los originales de Leibniz; L'Hospital no redujo la tarea a una trascripción fiel de Leibniz ni compiló sus escritos.

L'Hospital asume el reto de estructurar un nuevo discurso del cálculo; claro en la exposición de las ideas y con un lenguaje accesible. Esto produjo la primera Transposición Didáctica del cálculo en el que las ideas aparecieron adaptadas a una circunstancia específica (de difusión) y se organizaron en una secuenciación lógica (atendiendo a la evolución y profundidad de las ideas).

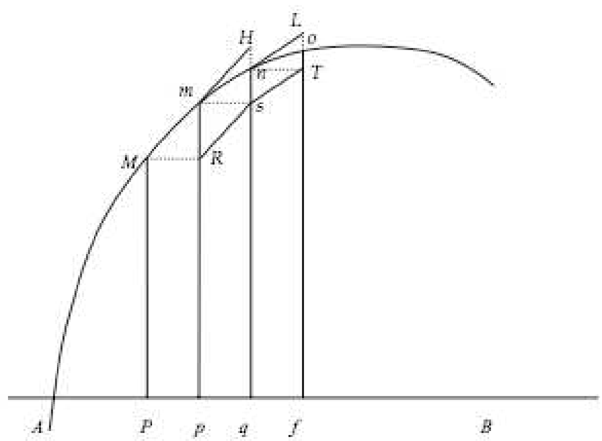
El resultado fue doble, por un lado la difusión de las ideas del cálculo y por otro una *estructura-modelo* para la escritura de libros para difusión. No sabemos del impacto y de la dimensión de influencia, pero asumimos que esta forma de abordar un saber para fines de difusión (o didácticos) produjo un impacto; tanto para las siguientes publicaciones así

[2] http://www.prbb.org/quark/26/default.htm

como en el conocimiento mismo, pues en el intento de definir los conceptos del cálculo se convierten en motivo de estudio otros objetos que inicialmente no eran de interés tal como el *punto de inflexión*[3]. (Tercera hipótesis)

Analyse des infiniment petits, L'Hospital, 1696

En el capítulo IV, titulado *Uso del cálculo de las diferencias para encontrar los puntos de inflexión y de retorno*, L'Hospital explica el uso de *las segundas diferencias*, para hallar los puntos de inflexión en una curva. Llama *diferencia de diferencia* o *segunda diferencia* a la porción infinitamente pequeña en la que aumenta o disminuye continuamente *la diferencia* de una cantidad variable, siguiendo con esta lógica, se hace posible hallar las diferencias de orden superior.



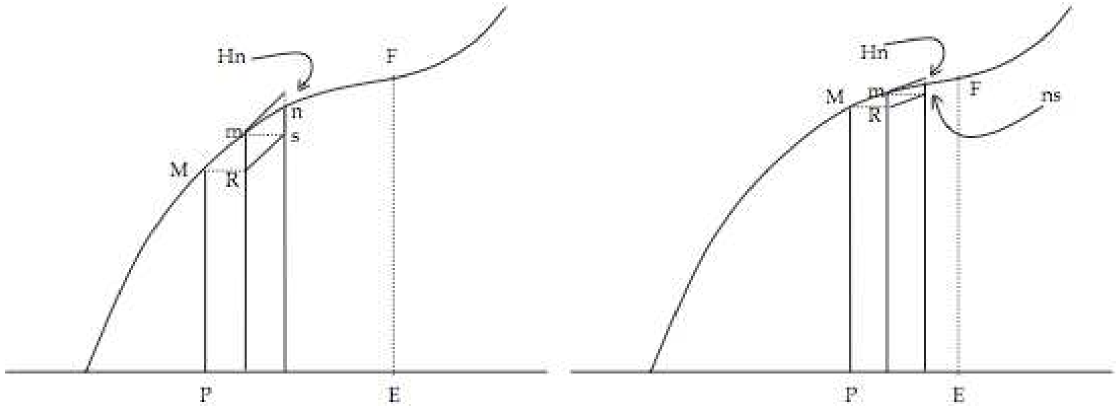
La diferencia entre las ordenadas *PM* y *pm* es *Rm* lo que representa la primer diferencia *Hn*, es la diferencia de la "diferencia *Rm*" o bien *la segunda diferencia de PM*, pues al suponer que *dx* es constante *Pp* se vuelve *pq*, la diferencia de *Rm* es *Sn*, y por lo tanto *Hn* es la diferencia de la diferencia. En forma sucesiva se pueden representar las diferencias de orden superior a dos siguiendo la misma estrategia.

Al distinguir distintos órdenes de diferencias, L'Hospital utiliza argumentos para establecer comparación entre ellos, tal como describe los distintos órdenes de infinitésimos en el *Capítulo I*, en relación a las diferencias sucesivas, hace una observación importante; que el criterio para distinguir entre una diferencia y otra, está en caracterizar su naturaleza, por ejemplo *Rm* es infinitamente pequeño con relación a *PM* e infinitamente grande en relación a *Hn*. Así también para las abscisas; *Pf* es infinitamente pequeña con relación a *AP*.

Este corolario finaliza con una propiedad analítica que caracteriza el punto de inflexión. L'Hospital explica que si los segmentos *Rm* y *Sn* fueran iguales, entonces su diferencia,

[3] El punto de inflexión no era objeto de estudio, era considerado como un punto característico en la curva, es decir, como una cualidad en la curva.

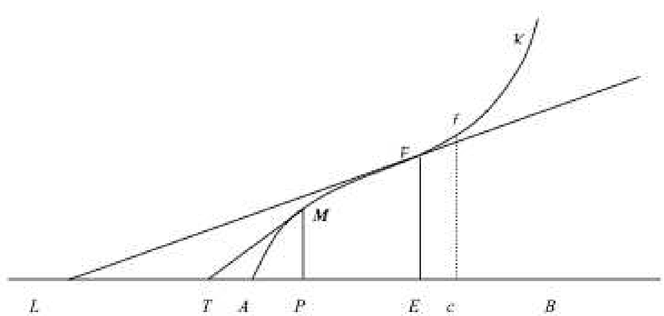
Hn=d²y, sería nula. En la curva se observa que a medida que se obtienen *segundas diferencias* ordenadas cada vez más cercanas al punto de inflexión, éstas van tendiendo a cero.



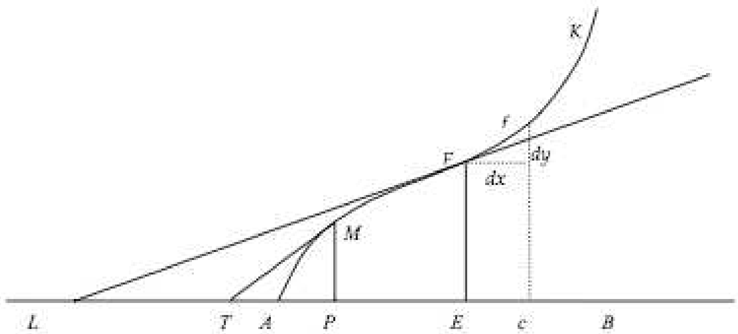
Una segunda caracterización del punto de inflexión, se sustenta en un argumento puramente geométrico haciendo referencia a las propiedades de la forma de las curvas, dice; …*cuando una línea curva... es en parte cóncava y en parte convexa... el punto F [*referido un punto especial en la curva] ... que *separa a la parte cóncava de la convexa, y que por consiguiente es el fin de una y el comienzo de la otra, es llamado punto de inflexión.* (L’Hospital, 1696)

De esta forma, el punto de inflexión aparece en escena después de una inspección visual sobre la curva, al identificar concavidades, de la misma forma que para estimar el máximo o mínimo se necesita de distinguir tamaños. Estas argumentaciones muestran que L’Hospital rescató elementos provenientes de la geometría para sustentar sus definiciones.

Una tercer argumentación se basa en las propiedades geométricas respecto al tamaño de la subtangente. En su modelo explica, que cuando *AP* crezca continuamente, *AT* lo hará también, hasta que *P* llegue a caer en *E*, después del cual, *AT* irá disminuyendo. Esto supone que el punto *L* es un punto “extremo” o *máximo* en el momento en que *P* cae sobre *E*.



Después de esta explicación, se ahonda en la definición algebraica; al denominar *AE=x* y a *EF=y*, ordenada y abscisa respectivamente



Se deduce que:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x+AL}$$
$$\frac{dy}{ydx}=\frac{1}{x+AL}$$
$$\frac{ydx}{dy}=x+AL$$
$$AL=\frac{ydx}{dy}-x$$

AL que representa la diferencia de la subtangente es la parte variacional, del cual, para calcular el punto de inflexión, habrá que determinar dónde esa *variación es cero.*

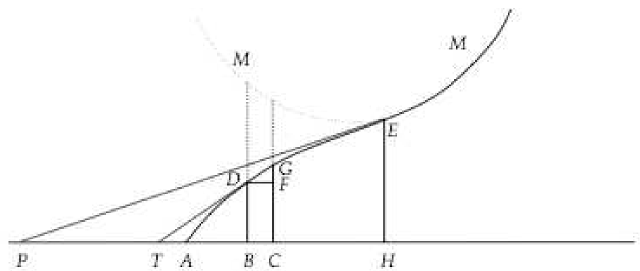
$$AL=d\left(\frac{ydx}{dy}-x\right)=0$$
$$AL=\frac{dy\cdot d[ydx]-ydx\cdot d[dy]}{(dy)^2}-dx=0$$
$$AL=\frac{dy\cdot dxdy-ydx\cdot d^2y}{dy^2}-dx=0$$
$$AL=\frac{dy^2dx-ydx\cdot d^2y}{dy^2}-dx=0$$
$$AL=\frac{-ydx\cdot d^2y}{dy^2}-dx=0$$

Al ser dividida por *dx*, diferencia de *AE*

$$AL=-\frac{ydxd^2y}{dy^2}\cdot\frac{1}{dx}=0$$
$$AL=-\frac{yd^2y}{dy^2}=0$$

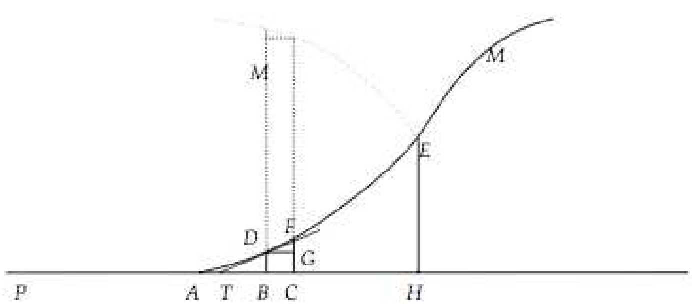
Institutioni Analiche, Agnesi, 1748

El *capítulo IV* trata el estudio de las curvas con *curvatura contraria y de regreso*, las llama así, atendiendo a sus características; *contrarias* debido un cambio en su crecimiento. Su explicación inicia caracterizando el punto de inflexión a través de las propiedades infinitesimales, para ello, Agnesi hace referencia a una gráfica en donde exhibe un punto de inflexión, describe además las partes involucradas en la construcción geométrica y la forma en la que se relacionan.



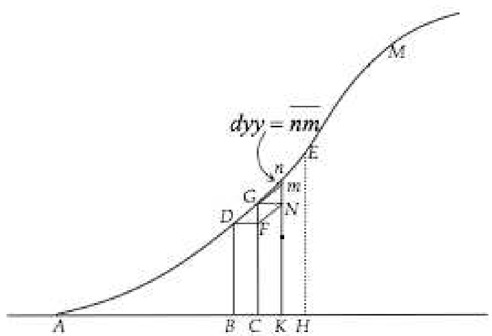
Consideremos una abscisa cualquiera *AB* = *x*, y su correspondiente ordenada *BD* = *y*, determinamos además una ordenad *CF* paralela e infinitamente próxima a *BD*, asumimos que *dx* = *BC* fluye en forma constante. Al crecer la abscisa *AB* = *x*, la diferencia *GF* de la ordenada *BD*, es decir *dy*, siempre será menor hasta que la ordenada sea *HE* la correspondiente al punto contrario, después de éste la *dy* será cada vez mayor. De esto modo se determina un punto especial en donde las diferencias vienen decreciendo y después del cual empiezan a crecer, por consiguiente, explica Agnesi, en el punto de flexión contraria la *dy* será un mínima, por lo que *ddy* = 0 o bien *ddy*=∞, será la fórmula para determinar los puntos contrarios o de flexión contraria.

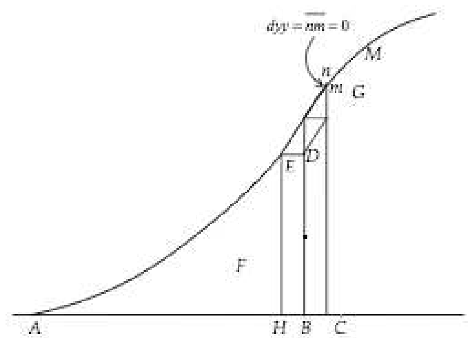
Agnesi presenta esta caracterización estudiada, pero ahora en referencia a otra curva, la cual por su naturaleza exhibe las propiedades anteriores en forma inversa; Sea una curva *ADEM*, en ella las diferencias crecen hasta el punto *E*, llamado punto de curvatura contraria o de regreso, después del cual las diferencias decrecen, por lo que el punto *dy* representa un máximo, para lo cual se sigue usando la fórmula *ddy* = 0 o bien *ddy*=∞



Otra caracterización al punto de inflexión está referida a una propiedad de las segundas diferencias. Explica que cuando una curva es primero cóncava, entonces la segunda diferencia será negativa hasta el punto de flexión contrario, si por el contrario la curva primero es convexa, entonces las segundas diferencias serán positivas hasta antes del punto de inflexión.

Esta argumentación permite concluir con una tercer caracterización al punto de flexión contraria, ésta se determina cuando su segunda diferencia cambia de positiva a negativo o de negativa a positiva, en términos modernos, cuando dada una $f(x)$ su $f'(x)$ determina una raíz, exceptuando casos como el de la función $y = x^4$, se tiene en $f(x)$ un punto de inflexión. Apoyándonos en la construcción de Agnesi para visualizar las diferencias de orden superior, observamos que al tomar ordenadas cada vez más cercanas al punto de inflexión sus diferencias segundas son casi cero.





Otra caracterización al punto de inflexión, se sustentada en las propiedades geométricas cuando se está reconociendo su forma, dice que cuando la curva es primero convexa y después cóncava el punto que determina el cambio representa en punto de flexión contraria.

La quinta caracterización que Agnesi ofrece, se refiere al uso de la subtangente como recurso en el cálculo del punto de inflexión. Explica que dada una curva *AEM*, primero cóncava y después convexa, se determina en el punto *D* la recta *DT* y en el punto *E* la recta *EP*.

Cuando la abscisa *AB* crezca continuamente y *B* caiga en *H*, entonces *AT* (la subtangente) habrá crecido e interceptará a la tangente que se determina en el punto de inflexión a lo cual *AT* dejará de crecer y pasando el punto irá decreciendo. Así en el punto *E* se determina la magnitud máxima de *AP*, de lo cual se tiene la siguiente relación $AP = \frac{ydx}{dy} - x$ al diferenciar y tomar *dx* constante tenemos $\frac{dy^2dx - ydxddy - dy^2dx}{dy^2}$ al igualarlo a cero o a infinito y dividiendo por -*ydx* y multiplicando por $-dy^2$, obtendremos *ddy* = o bien *dyy*=∞.

A manera de conclusión

En el análisis realizado a las obras *didácticas de antaño*, se destaca el carácter geométrico de su discurso el cual prevalece en la presentación de sus definiciones y en las argumentaciones alrededor de los conceptos. Esta perspectiva geométrica aparece reflejada en los títulos y subtítulos que asignan a los capítulos; evocando el uso del cálculo como herramienta para resolver ciertas problemáticas ya conocidas. El pensamiento geométrico actúa como *escenario* para la significación de ideas en la versión didáctica del cálculo.

La presentación de los contenidos no es aleatoria, tanto Agnesi como L'Hospital exponen las ideas matemáticas atendiendo a una secuencia lógica, producto de un interés explícito de *organizar* y presentar las ideas de *forma didáctica*; desde las más simples hasta las más complejas. Un rasgo notable en este tipo de obras, es la inclusión de ejemplos comentados, y en el caso de la obra de Agnesi algunos problemas resueltos, cuyo objetivo es *movilizar* al lector para *usar* las ideas matemáticas estudiadas y aplicarlas en situaciones concretas. Esta *intencionalidad* caracteriza a una nueva línea de publicaciones, en el que se destaca un *discurso* con tono didáctico y un esfuerzo por organizar el saber.

En la revisión de la sociogénesis del tratamiento didáctico del punto de inflexión, se destaca la existencia de un discurso *didáctico* sustentado en un acercamiento múltiple a los conceptos estudiados, de tal forma que, para un mismo concepto se tienen al menos tres caracterizaciones distintas.

El análisis realizado a estas múltiples caracterizaciones del punto de inflexión, demostró que el discurso matemático ser articula a partir del estudio de las regularidades del concepto. Cuando se describe una región en la curva en donde las diferencias después de venir decreciendo ahora empiezan a crecer, entonces se determina la existencia de un punto en donde la dy será un mínima, por lo que $ddy = 0$ o bien $ddy = \infty$

En este caso, el punto de inflexión se determina al identificar el comportamiento de la variación en las diferencias de una curva contigua con concavidades encontradas. Cabe destacar que la caracterización del *punto de inflexión* a través de la variación de la subtangente, fue una idea que germinó en el discurso de L'Hospital y Agnesi, pero perdió vigencia con el paso del tiempo. Actualmente este acercamiento está ausente de los libros de texto.

Las obras de L'Hospital y Agnesi se configuraron a partir de una Transposición de las ideas matemáticas del cálculo de Leibniz y Newton. En un segundo momento, estas obras de carácter didáctico sirven como punto de partida para formular nuevos trabajos (entre ellos algunos de carácter organizador); ofreciendo explicaciones matemáticas pero además proporcionando una visión del cálculo (visible en posteriores trabajos como el de Euler) en cuanto a su presentación y organización:

Variados ámbitos de significación

El discurso matemático en las obras de L'Hospital y Agnesi incluye una aproximación múltiple a los conceptos. Se pueden observar caracterizaciones geométricas, analíticas, algebraicas, y combinación de ellas que posibilitan un estudio de los conceptos, atendiendo a las regularidades y características que se muestran.

Observemos las múltiples caracterizaciones del punto de inflexión. En (L'Hospital, 1696)

Propiedad infinitesimal. Argumenta una situación en las que el comportamiento de las diferencias determina una *segunda diferencia nula* en una zona próxima al punto de inflexión.

Respecto a su forma. Argumenta una situación geométrica en donde la curva cambia de concavidad. El punto donde ocurre el cambio se denomina *punto de inflexión.*

Referente al comportamiento de la subtangente. Argumenta una situación geométrica en la que se construye una subtangente a una ordenada. La variación de la ordenada determina un cambio de magnitud en la subtangente. La magnitud máxima de la subtangente determina un *punto de inflexión.*

Propiedad infinitesimal. Caso A, mínimas diferencias. El punto de inflexión determina un lugar en donde las diferencias después de venir decreciendo ahora empiezan a creceren este punto la dy será un mínima, por lo que $ddy = 0$ o bien $ddy = \infty$.

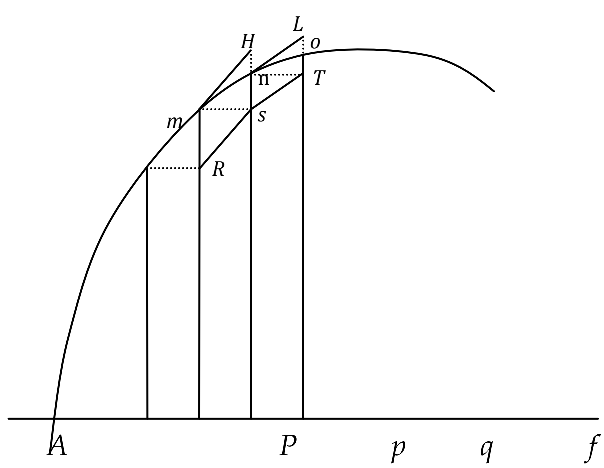
Propiedad infinitesimal. Caso B, máximas diferencias. Las diferencias crecen hasta cierto punto E, llamado punto de curvatura contraria o de regreso, después del cual decrecen, por lo que el punto *dy* determina un máximo.

Signo de las segundas diferencias. Cuando la curva es primero cóncava, entonces la segunda diferencia será negativa hasta el punto de flexión contrario, si por el contrario la curva primero es convexa, entonces las segundas diferencias serán positivas hasta antes del punto de inflexión.

Cambio de Signo en la segunda diferencia. El punto de inflexión se determina cuando su segunda diferencia cambia de positiva a negativo o de negativa a positiva

Variaciones de diferente naturaleza

Se incluyen situaciones gráficas y analíticas en donde se estudian las variaciones de distintos órdenes en forma simultánea.



La diferencia entre las ordenadas *PM* y *pm* es *Rm* lo que representa la primer diferencia *Hn,* es la diferencia de la “diferencia *Rm*” o bien *la segunda diferencia de PM,* pues al suponer que *dx* es constante *Pp* se vuelve *pq*, la diferencia de *Rm* es *Sn*, y por lo tanto *Hn* es la diferencia de la diferencia. En forma sucesiva se pueden representar las diferencias de orden superior a dos siguiendo la misma estrategia.

Al distinguir distintos órdenes de diferencias, L’Hospital utiliza argumentos para establecer comparación entre ellos, tal como describe los distintos órdenes de infinitésimos en el *Capítulo I,* en relación a las diferencias sucesivas, hace una observación importante; que el criterio para distinguir entre una diferencia y otra, está en caracterizar su naturaleza, por ejemplo *Rm* es infinitamente pequeño con relación a *PM* e infinitamente grande en relación a *Hn.* Así también para las abscisas; *Pf* es infinitamente pequeña con relación a *AP*.

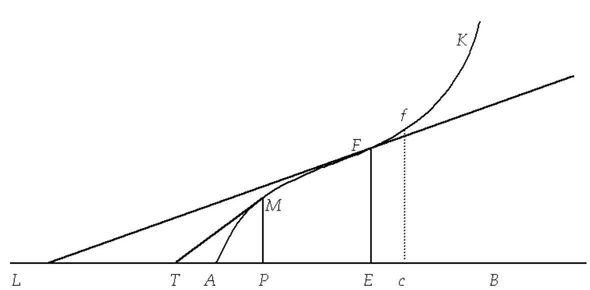
Estudio de un concepto a partir de sus regularidades

La múltiple aproximación a los conceptos se complementa con un estudio de las regularidades que guarda; desde cada ámbito de significación y atendiendo a sus características.

En el estudio del punto de inflexión, la *formulación de sus regularidades* atiende a las características del ámbito desde se enuncia y a las propiedades que guarda en relación a las diferencias (de distintos órdenes).

Por ejemplo, la caracterización *referente a la subtangente*.
Estrategia de comunicación: Regularidad en el comportamiento de la subtangente cerca del punto de inflexión

Criterio: magnitud máxima
Argumento: variación de la subtangente
Referente: geométrico - analítico



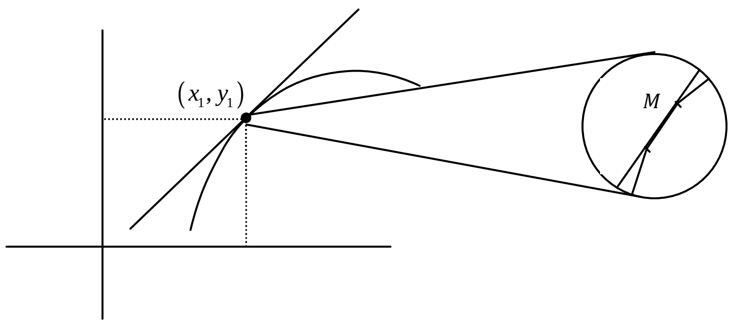
Variación de las ordenadas:
En su modelo explica, que cuando *AP* crezca continuamente. *AT* lo hará también, hasta que *P* llegue a caer en *E*, después del cual, *AT* irá disminuyendo.

Magnitud máxima / Variación de la subtangente.
Esto supone que el punto *L* es un punto "extremo" o *máximo* de la subtangente en el momento en que *P* cae sobre *E*.

Un primer ejercicio para el abandono de la dimensionalidad

Con la intención de generar un tratamiento *didáctico* de la matemática, L'Hospital desarrolla una interpretación de las curvas bajo el argumento infinitesimal, sin importar su grado, se puede hacer un «hacer un acercamiento» que permita observar su naturaleza.

La curva está compuesta por un número infinito de lados, entonces la recta tangente es la prolongación del segmento infinitesimal.



Esta estrategia tiene una estrecha relación con aquellas que se desarrollaron desde la edad media para el estudio de los fenómenos complejos. Usando el método analítico, para inspeccionar las partes, es posible reducir la dificultad a través de simplificar el problema hasta sus primeras manifestaciones. Algunos trabajos como la *regla de Merton*, muestra cómo resolvieron ingeniosamente algunas problemáticas referentes al movimiento.

Así mismo, las definiciones en las obras de L'Hospital y Agnesi no se restringían por su grado. El modelo geométrico que propone L'Hospital permite definir con argumentos visuales las segundas diferencias, no se negaba la posibilidad de transitar hacia la tercera diferencia, lo cual presuponía que las derivadas podían avanzar en número de orden; primeras, segundas, etc

Bibliografía

Agnesi, M. (1748). *Instituzioni analitiche ad uso della gioventú italiana* ... Tomo I, Publicac. In Milano : nella Regia Ducal Corte, 1748

Albert, A. (1998). Introducción a la epistemología. En Farfán (Coord. Edit), *Antologías, número II* (pp. 1-28). México: Cinvestav-IPN (programa editorial, área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa).

Albert, A. (1996). *La convergencia de series en el nivel superior. Un acercamiento sistémico.* Tesis de doctorado, Cinvestav-IPN, México.

Artigue, M. (1998). Épistémologie et didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 2 (3), 241-286.

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En Gómez, P. (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática.* (pp. 33-59). Santafé de Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamérica.

Bachelard, G. (1981). *La formación del espíritu científic*o (9a, edición). México: Siglo XXI Editores.

Benítez, R. (1997), *Cálculo Diferencial, para Ciencias Básicas e Ingeniería*, Ed. Trillas. México

Berkeley, G. (1980). *Principios del conocimiento humano.* Buenos Aires, Argentina: Aguilar, Argentina.

Bos, H. J. M. (1974). Differentials, higher-order differentials and the derivative in the Leibnizian calculu*s. Arch. His. Exact. Sci.* 14, 1-90.

Bosh M., Chevallard, Y., & Gascón J., (1997). *Estudiar matemáticas; el eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje,* Hosori Editorial: Barcelona.

Bordeau, P. et. Al (2000) *El oficio de sociólogo.* Siglo XXI Editores, México

Brousseau, G. (1983). Les obtacles épistémologiques et les problémes en mathematiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 4 (2), 165-198.

Cantoral, R. (2001). *Matemática Educativa. Un estudio de la formación social de analiticidad.* Grupo Editorial Iberoamérica. México.

Cantoral R., *et al* (2000). *Desarrollo del pensamiento matemátic*o. México: Trillas.

Cantoral, R. (2000). Pasado, presente y futuro de un paradigma de investigación en Matemática Educativa. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativ*a, *Relme-13, Santo Domingo, República Dominicana* (volumen 13, pp. 54-62). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. (1998). La aproximación socioepistemológica a la investigación en matemática educativa: el caso del pensamiento y lenguaje variacional. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativ*a, *Relme-12, Santafé de Bogotá, Colombia.* (volumen 12, tomo I, pp. 41-48). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. (1998). Enseñanza y aprendizaje en ambientes tecnológicos: el caso de la matemática escolar. En Cordero, F. (Coord. Edit), *Antologías, número III* (pp. 105- 127). México: Cinvestav-IPN (programa editorial, área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa).

Cantoral, R. (1997a). *Pensamiento y lenguaje variacional*. México: Cinvestav-IPN (cuadernos del Seminario de Investigación del área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa).

Cantoral, R. (1997b). Matemática educativa. En Farfán, R. (Coord. Edit), *Antologías, Número I* (pp. 81-98). México: Cinvestav-IPN (programa editorial, área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa).

Cantoral, R. (1995). Acerca de las contribuciones actuales de una didáctica de antaño: el caso de la serie de Taylor. *Mathesi*s 11 (1), 55-101.

Cantoral, R. (1990). *Categorías relativas a la apropiación de una base de significados propios del pensamiento físico de la teoría elemental de las funciones analítica*s. Tesis de doctorado, Cinvestav-IPN, México.

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Épsilon* 42, 353-369.

Cantoral, R. y Farfán, R. (1997). *Historia de la Matemátic*a (manual para el curso de maestría). México: ITESM.

Cantoral, R, y Mirón, H. (2000). Sobre el estatus de la noción de derivada: De la epistemología de Joseph Louis Lagrange al diseño de una situación didáctica. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa* 3 (3), 265-292.

Cambray, R. y Cantoral, R. (1990). *Lecciones de cálculo antiguo*. México: Cinvestav-IPN (sección de Matemática Educativa).

Cambray, R. (1998). L'Hospital y el primer libro de texto de cálculo diferencial. En *L'Hospital, Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas (pp 1-14). México: UNAM (colección Mathema).*

Castañeda, A. (2002). Estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión: una aproximación socioepistemológica. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa* 5(2), 27-44

Castañeda, A. (2000). *Estudio didáctico del punto de inflexión; una aproximación socioepistemológica.* Tesis de Maestría, Cinvestav-IPN, México.

Chevallard, Y. (1992), Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique, *Recherches en Didactique des Mathématiques, 12/1, 73-112.*

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* Buenos Aires, Argentina: Aique Grupo Editor SA.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique.* Grenoble, France: La Pensée Sauvage.

Cordero, F. (2001).La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa* 4(2), 103-128

Cordero, F. (1994). *Cognición de la integral y la construcción de sus significados (un estudio del discurso matemático escolar)*. Tesis Doctoral, Cinvestav –IPN, México.

Descartes, R. (1997). *La geometrí*a (traducción de García, R.). México: Limusa-IPN (colección Textos Politécnicos).

Díaz, L. (1999). *Concepciones en el aprendizaje del concepto de límite: Un estudio de caso*. Tesis de doctorado, Facultad de Educación, Universidad Católica de Chile, Chile.

Dreyfus, T. (1990). Advanced Mathematical Thinking, en Hownson A. & Kahane J. (Eds.). *Mathematics and Cognition. A research synthesis by the international group for the Psychology of Mathematics Education* (113-134). Cambridge: Cambridge University Press.

Douady, (1995). La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. En Gómez, P. (Ed.) *Ingeniería Didáctica en educación matemática*. (pp. 61-96). Una Empresa Docente. Grupo Editorial Iberoamérica. México.

Euler, L. (1835). *Introduction a l'analyse infinitesimale*. Paris, France: Cliez Bachelier, Imprimeur-Libraire de l'École Polytechnique.

Farfán, R. (1998). Perspectivas y métodos de investigación en matemática educativa. En Farfán (Coord. Edit), *Antologías, Número II* (pp. 55-119). México: Cinvestav-IPN (programa editorial, área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa).

Farfán, R. (1997a). *Ingeniería didáctica: Un estudio de la variación y el cambi*o. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Farfán, R. (1997b). Ingeniería didáctica. En Farfán (Coord. Edit) *Antologías, Número I* (pp. 63-69). México: Cinvestav-IPN (programa editorial, área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa).

Farfán, R. (1993). *Construcción de la noción de convergencia en ámbitos fenomenológicos vinculados a la ingeniería: estudio de casos*. Tesis doctoral, Cinvestav-IPN, México.

Ferrari, M. (2001). *Estudio socioepistemológico de la función logaritmo*. Tesis de Maestría, Cinvestav-IPN, México.

Grattan-Guinness, I. (1984). *Del cálculo a la teoría de conjuntos: 1630-1910. Una Introducción históric*a. Madrid, España: Alianza Editorial.

Granville W. (1986). *Cálculo diferencial e integral*. Editorial Limusa, décima impresión. México.

González, R. (1988). *La derivada como una organización de las derivadas sucesivas. Estudio de la puesta en funcionamiento de una ingeniería didáctica de resignificación.* Tesis de Maestría, Cinvestav-IPN, México.

Kline, M. (1985). *La pérdida de la certidumbr*e. Madrid, España: Siglo XXI Editores.

L'Hospital, A. (1696). *Analyse des infiniment Petits pour L'intelligence des lignes courbes* (primera reimpresión ,1988). Paris, France, ACL-Editions.

L'Hospital, A. (1998). *Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curva*s (estudio introductorio, traducción y notas de Rodrigo Cambray Núñez). México: UNAM (colección Mathema).

Lizcano, E. (1993). *Imaginario colectivo y creación matemática*. Gedisa Editorial, España.

Martínez, G. (2000). *Explicación sistémica de los fenómenos didácticos, el caso de los exponentes no naturales.* Tesis de Maestría, Cinvestav-IPN, México.

Martínez, G. (2002). Explicación sistémica de fenómenos didácticos ligados a la convenciones de los exponentes. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa* 5(1), 45-78

Martínez, G. (2003). *Caracterización de la convención matemática como un mecanismo de construcción de conocimiento. El caso de su funcionamiento en los exponentes.* Tesis de Doctorado, Matemática Educativa, Cicata-IPN, México.

Muñoz, G. (2000). Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el cálculo integral. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa* 3(2), 131-170

Newton, I. (1687). *Philosophicae naturales principia matemática*. (Trad. Rada García) Edit. Alizana (Madrid, 1987). España.

Programa Nacional de Formación y Actualización de Profesores de Matemáticas, (1984). *Cálculo diferencial*, Sección de Matemática Edicativa , C.I.E.A. del IPN, México.

Protagonistas de la civilización, *Newton* (1983). Madrid, España: Debate, SA.

Pulido, R. (1997). *Un estudio teórico de la articulación del saber matemático en el discurso escolar: la transposición didáctica del diferencial en la física y la matemática escola*r. Tesis de doctorado, Cinvestav-IPN, México.

Ruiz, L. (2000). Ingeniería didáctica. Construcción y análisis de situaciones de enseñanza- aprendizaje. *Material de apoyo, del curso: Construcción y análisis de situaciones de enseñanza-aprendizaje, impartido en RELME XIV*. Panamá.

Sierpinska, A. (1984). Obstacles épistémologiques relatifs a la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 6, 5-67.

Sierpinska, A. & Lerman, S. (1996). Epistemolgies of mathematics and of mathematics education. En : A. J. Bishop et. Al (eds.), *Internacional Hanndbool of Mathematics Education* (pp. 827-876). Dordrecht, HL: Kluwer, A. P.

Struik, D. (1998). *Historia concisa de las matemática*s (traducción de Lezama, 3a edición). México: Instituto Politécnico Nacional.

Stewart J. (1998). *Cálculo*. Thomson, México.

Spivak, M. (1992). *Calculus. Cálculo infinitesimal*. Segunda Edición, Editorial Reverté: México.

School_of_Mathematics_and_Statistics - University_of_St_Andrews,_Scotland. (2003, Enero 20). *Biographies* [Documento WWW]. URL: http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/BiogIndex.html

Taylor, (1942). Derivatives in calculus. *American Mathematical Monthly* 49, 631-641

Timasheff, (1955). *La teoría sociológica.* México: Siglo XXI.

Valero S. (2000). *La derivada como organización de las derivadas sucesivas*. Tesis de Maestría, Universidad Virtual del ITESM, México.

Van Dijk, Teun, (1998). *Ideología*. Gedisa Editorial: España

Villoro, L. (1982). *Creer, saber, conocer.* Siglo XXI Editores, México.

Youschkevitech, (1976). The concept of function up to the middle of the 19th century. *Arch. Hist. Exact. Sci.* 16, 37-85