



ICME 11 Mexico 2008

11th International Congress on Mathematical Education

La representación gráfica de la recta tangente con respecto a una función para un punto específico utilizando el *software* winplot: algunas soluciones incorrectas presentadas por los estudiantes

Gisela Hernandes Gomes

Universidade Presbiteriana Mackenzie

giselah@mackenzie.br

Silmara Alexandra da Silva Vicente

Universidade Presbiteriana Mackenzie

silmara@mackenzie.br

LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA RECTA TANGENTE CON RESPECTO A UNA FUNCIÓN PARA UN PUNTO ESPECÍFICO UTILIZANDO EL SOFTWARE WINPLOT: ALGUNAS SOLUCIONES INCORRECTAS PRESENTADAS POR LOS ESTUDIANTES

Gisela Hernandes Gomes
Universidade Presbiteriana Mackenzie
Rua da Consolação, 930 – Consolação – 01302-907
+55-11-2114-8269 - São Paulo - Brasil
giselah@mackenzie.br

Silmara Alexandra da Silva Vicente
Universidade Presbiteriana Mackenzie
Rua da Consolação, 930 – Consolação – 01302-907
+55-11-2114-8269 - São Paulo - Brasil
silmara@mackenzie.br

Abstract: En términos generales los estudiantes tienen dificultades para entender los conceptos de la disciplina Cálculo Diferencial e Integral. En el presente trabajo presentamos algunos cuestionamientos sobre la aplicación de una actividad para los estudiantes del curso de Ingeniería Civil en lo que respecta a la representación de la recta tangente y recta normal en un punto particular de una función. Para el desarrollo de esta actividad fue indicado el uso de la Tecnología de Computación mediante la utilización del *software* Winplot. Los ejercicios resueltos presentados por los estudiantes muestran algunas incoherencias en la solución. Estos resultados nos llevaron a cuestionar el uso de una herramienta tecnológica para ayudarlos, e al mismo tiempo, investigar las fallas conceptuales que obstaculizan la percepción del estudiante en la solución correcta del problema.

INTRODUCCIÓN

Varios estudios en el área de Educación Matemática han sido hechos como resultado de las dificultades presentadas por los estudiantes de disciplinas relacionadas con el contenido básico de los cursos de graduación, tales como administración, economía, matemáticas, informática e incluso en la ingeniería. Estas encuestas muestran que los estudiantes no logran sus objetivos y que las dificultades enfrentadas se convierten en factores de gran reprobación y desistencia de estas carreras.

La disciplina de Cálculo Diferencial e Integral es uno de los más importantes núcleos de cursos básicos en ingeniería, ya que permite el estudio y modelación de problemas reales de los más diversos ámbitos de su desempeño profesional.

A pesar de ser una de las más tradicionales todavía no existe a menudo la verdadera comprensión y dominio de los conceptos necesarios, limitándose a la ejecución mecánica de la solución del problema. Las dificultades presentadas por los estudiantes de los cursos de Ingeniería en relación con los conceptos explorados en esta disciplina que van desde la falta de conocimientos básicos de matemáticas, tales como las planteadas por Gomes, Lopes y Nieto (2005) hasta aquellos de naturaleza epistemológica. Uno de los conceptos fundamentales para el desarrollo de las ideas del cálculo es la función, sin embargo Cantoral Uriza y Shac (2000) explican que la complejidad de este concepto es reflejada en las diversas representaciones que tanto alumnos y profesores enfrentan. Esta cuestión se ha debatido en varias reuniones tanto en el ámbito de la Educación como en Congresos de Educación Matemática de

la Ingeniería tratando de mejorar la práctica pedagógica en busca de elementos para la comprensión de los conceptos estudiados en clase y su aplicación en diferentes situaciones prácticas.

Las nuevas tecnologías, según Gomes y Vicente (2007) se destacaron como herramientas complementarias y de exploración que pueden contribuir a mejorar la calidad de la educación, proporcionando así la creación de nuevos conceptos. En este contexto, este trabajo tiene como objetivo mostrar como la tecnología puede ser utilizada para añadir conocimiento y aclarar las dudas conceptuales. Tras el desarrollo de una actividad de exploración de conceptos matemáticos relacionados con la recta normal y la recta tangente al gráfico de una función en un punto determinado utilizando el *Software* Winplot se observó que algunos estudiantes resolvieron el ejercicio usando el *software* correctamente, sin embargo la solución matemática fue incorrecta. Nuestra mayor pregunta es la siguiente:

Como un estudiante puede validar su solución y estar realmente seguro de que el ejercicio está resuelto correctamente?

Siguiendo la misma línea de razonamiento nos preguntamos:

Qué conceptos de cálculo faltan para que el alumno pueda por si solo analizar y verificar si su solución es la correcta?

En vista de discutir el uso de las nuevas tecnologías, en especial el *Software* Winplot, este artículo tiene como objetivo presentar las actividades llevadas a cabo por los estudiantes y discutir las soluciones incorrectas de determinados problemas así como plantear algunas preguntas sobre el vínculo entre el uso de *software* y la correcta solución del ejercicio.

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

El adelanto de la tecnología proporciona, tanto a los estudiantes como a los profesores una forma diferente de explorar los conceptos matemáticos. Sin embargo hay una necesidad de reflexión sobre la práctica docente de los profesores en el uso de ambientes de aprendizaje, para estudiar y evaluar cómo esta tecnología puede aplicarse de una manera constructiva con el fin de mejorar el potencial del estudiante y, por otro lado, adicionar conocimientos. Según Dall'Anese (2006) los estudios relacionados con el uso de la tecnología en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, demuestran que la computadora es una herramienta que facilita la visualización del contenido abstracto aprendido en el aula. En este contexto, la tecnología se identifica como una herramienta promisorio para la discusión y el análisis de estos conceptos.

Es importante destacar en este debate, la labor de Bonomi, Boscaino y Nieto (2004) que presentan el uso de herramientas tecnológicas que permitan establecer las situaciones que promueven no sólo la creatividad, si no también el sentido crítico y donde el conocimiento construido por los estudiantes es evaluado y valorado, tomando con esto una dimensión más significativa.

El uso de un *software* gráfico como Winplot proporciona al alumno el desarrollo de conjeturas a partir de la observación y la reflexión.

Encuestas como la de Vicente et al. (2005) se celebraron tanto en la disciplina de Cálculo Diferencial e Integral como en Álgebra Lineal donde son empleados otros *softwares*, por ejemplo, el MATLAB.

En esta experiencia se observó que los estudiantes fueron reticentes a utilizar este *software* debido a que estas disciplinas son enseñadas en el primer año de

universidad y los estudiantes no han tenido contacto con esta herramienta computacional.

Los estudiantes argumentaron que el software requiere un poco más de conocimientos y habilidades para que pudieran desarrollar los ejercicios con facilidad y velocidad. A pesar de que las lecciones fueron preparadas para facilitar la visualización de ciertos conceptos geométricos se dieron cuenta de que a pesar de la experiencia ser válida, sería más conveniente en materias básicas, trabajar inicialmente con un software más simple.

La elección del *software* Winplot ocurrió principalmente debido a la experiencia con otros *softwares* y la necesidad de una herramienta más simple, donde la principal atención fuera centrada en el aprendizaje de los contenidos básicos trabajados en el aula y no en las dificultades que los alumnos pudieran presentar en el dominio del programa.

De acuerdo con Jesús (2007) a través del uso del Winplot es posible trabajar las actividades que proporcionan una mejor comprensión de los conceptos básicos de cálculo, así como el desarrollo de actividades de geometría analítica, integrales, límites y derivadas.

Varios *software* que permiten trabajar con gráficos están disponibles en el mercado, tales como Matlab, Maple, Cabri-Geomètre y Logo. Además de muchos de ellos ser programas propietarios, requieren del usuario cierta habilidad en su empleo.

Por tanto para este trabajo fue seleccionado el Winplot principalmente porque se trata de un *software* libre, facilitando el acceso de los estudiantes tanto en la Universidad como en su propia casa.

En la Universidad, el software Winplot está instalado en un laboratorio de la Facultad de Ingeniería, para uso exclusivo de los estudiantes y profesores facilitando así el acceso de las personas que no tienen computadora en su residencia.

Además de esta investigación, otras disciplinas del Curso de Ingeniería realizan trabajos con los estudiantes donde utilizan este software.

El *software* Winplot, creado por Richard Parris del Phillips Exeter Academy en torno de 1985, es un programa de dominio público (freeware) y está disponible en siete idiomas. La versión portuguesa fue el resultado de la iniciativa y el compromiso de Adelmo Ribeiro de Jesús. Algunos beneficios de su utilización pueden destacarse, como la interactividad, la facilidad de uso de menús y también el tamaño de la instalación del software en el ambiente Windows.

Este *software* también fue elegido porque tiene opciones para representar una imagen en dos dimensiones de manera simple y atractiva además de que los recursos que el *software* presenta en relación a sus parámetros de visualización, por ejemplo, trazar dos o más funciones al mismo tiempo en el mismo gráfico con diferentes colores auxilia en la comparación de situaciones diferentes permitiendo al usuario poder verificar si la figura está de acuerdo con los cálculos realizados teóricamente.

LA ACTIVIDAD DESARROLLADA POR LOS ALUMNOS

La disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Presbiteriana Mackenzie tiene un calendario de carga horaria de 6 clases (50 minutos cada clase) semanal divididas en 4 clases teóricas y 2 clases prácticas. La enseñanza teórica-práctica es ejecutada con la mitad de la clase, y esta división proporciona un entorno en el que profesores y alumnos pueden establecer una relación más estrecha que facilita la detección de las dificultades encontradas por los alumnos en determinadas materias, así como sirve para promover la integración docente / alumno y alumno / alumno de forma que el estudiante tiene más espacio para la discusión de los conceptos vistos en clase.

Los principales temas abordados en esta disciplina son: estudio de las funciones reales de una variable real, límites, continuidad, derivadas y sus aplicaciones, integrales, primitivas, integral de Riemann y aplicaciones (cálculo de área y volumen).

Esta actividad se está llevando a cabo con los estudiantes de la primera etapa de Ingeniería Civil a partir del 1^o semestre de 2005 siendo destacadas las soluciones dadas a problemas de 3 estudiantes de la 1^a etapa del curso de Ingeniería Civil de la 1^o semestre de 2008. Las resoluciones presentadas en este artículo también se produjeron en las actividades estudiantiles de los años anteriores. La actividad consistió de dos ejercicios para encontrar la ecuación de la recta tangente y la recta normal al gráfico de una función en un punto.

La primera se dio sobre la base de una función explícita y la segunda de una función dada implícitamente. Para que no ocurra la copia de las resoluciones de las actividades propuestas, la profesora de la disciplina escogió diferentes funciones para los alumnos.

Para la primera función el alumno tendría que escoger un punto perteneciente a la función y realizar los cálculos juntamente con los gráficos; y en la segunda el punto ya era dado conjuntamente con la ecuación y el alumno debería presentar los cálculos y los gráficos obtenidos. Los estudiantes tuvieron la oportunidad de realizar los ejercicios en casa y entregarlos dos semanas después del sorteo de cada función. La nota de la actividad podría ser substituida por una pregunta en la 2^a prueba Del semestre valiendo hasta dos (2.0) puntos. Caso el alumno no entregar los ejercicios resueltos no sufriría pérdida de puntos en su nota final, o sea, el alumno estaba consciente de que la actividad no era obligatoria, sin embargo podría ayudarlo en la nota de la prueba.

De los 61 alumnos de la clase A, 24 alumnos no entregaron y 05 entregaron solamente uno de los ejercicios solicitados; de los 54 alumnos de la clase B, 22 no entregaron y 03 entregaron solamente uno de los problemas propuestos.

El objetivo de la actividad fue utilizar una herramienta computacional con la cual los alumnos pudiesen visualizar el gráfico de una función y los gráficos de la recta tangente y la recta normal a un determinado punto de la función.

Los alumnos fueron conducidos al Laboratorio de Informática para que pudiesen conocer El programa Winplot y sus posibilidades antes de dar inicio a la actividad metodológica. Esa clase fue impartida en el horario correspondiente a la clase de ejercicios, ya que esa clase es con el grupo dividido, lo que facilita la discusión de determinados aspectos. En la página web de la profesora Gisela (<http://meusite.mackenzie.com.br/giselahgomes>) fue disponibilizado el programa para que los Estudiantes pudieran hacer la instalación del mismo en sus propios ordenadores y explorarlo posteriormente.

RESULTADOS PRESENTADOS POR 3 ALUMNOS OBSERVADOS

En esta parte del trabajo son mostradas algunas soluciones inadecuadas presentadas por los alumnos, en este caso 3 escogidos entre aquellos que entregaron los ejercicios propuestos.

El alumno A¹ al resolver el ejercicio referente a la función explícita nos muestra que hubo un error en el cálculo del coeficiente angular de la reta tangente, pues al contrario de calcular en radianes, efectuó los cálculos en grados. El gráfico em este caso no se mostró eficiente em relación a mostrar AL estudiante que SUS cálculos estaban incorrectos, como muestra la figura 1.

¹ El nombre del alumno A fue reservado por cuestiones éticas.

$$f(x) = \sec(x/2 + 1) \cdot (x + 3)$$

Ecuación da reta tangente:

$$y = x + 3$$

Cálculos: $P(-3,0)$

$$f'(x) = \sec(x/2 + 1) \cdot \text{tg}(x/2 + 1) \cdot (x + 3) + \sec(x/2 + 1) \cdot 1$$

$$M_{\text{tg}} = f'(-3)$$

$$M_{\text{tg}} = \sec(-3/2 + 1) \cdot \text{tg}(-3/2 + 1) \cdot (-3 + 3) + \sec(-3/2 + 1)$$

$$M_{\text{tg}} = \sec(-1/2) = 1 \quad \times$$

$$y - 0 = 1(x + 3) \Leftrightarrow y = x + 3 \quad \times$$

Ecuación da reta normal:

$$y = -x - 3$$

Cálculos: $P(-3,0)$

$$M_{\text{tg}} = 1 \Leftrightarrow M_{\text{N}} = -1$$

$$y - 0 = -1(x + 3) \Leftrightarrow y = -x - 3 \quad \times$$

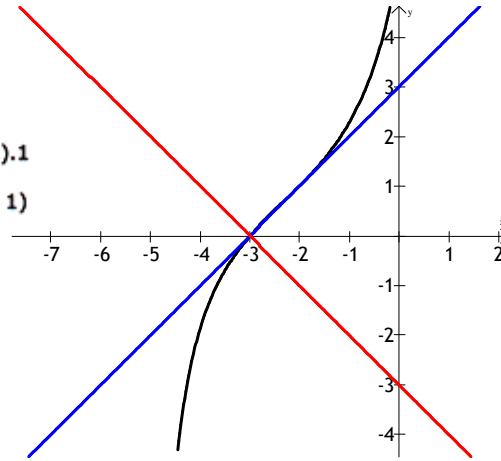


Figura 1 – Solución presentada por el alumno A

El alumno B² en sus cálculos mostró un error en la regla de la cadena, como puede ser verificado en la figura 2. Al usar el *software* para generar el gráfico, no observo que la recta no era tangente a la función en el punto escogido. Ese resultado nos lleva al siguiente cuestionamiento:

El alumno no domina el significado de recta tangente al gráfico de una función en un punto?

$$F(x) = \sqrt{3x-2} \cdot \sin(2x)$$

Ecuación da reta tangente:

$$f'(x) = (3x-2)^{\frac{1}{2}} \cdot \sin(2x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (3x-2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3 \cdot \sin(2x) + (3x-2)^{\frac{1}{2}} \cdot \text{tg}(2x) \cdot 2$$

$P(\pi, 0)$

$$f'(\pi) \Rightarrow \sin(2\pi) \quad f'(\pi) = (3\pi-2)^{\frac{1}{2}} \cdot 1$$

0 $m = \sqrt{3\pi-2} \quad \times$

• tangente

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y = \sqrt{3\pi-2} \cdot (x - \pi)$$

$P(\pi, 0) \quad \checkmark$

Ecuación da reta normal:

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

$$m_2 = \frac{-1}{\sqrt{3\pi-2}}$$

• normal

$$y_n = \frac{-1}{\sqrt{3\pi-2}} \cdot (x - \pi)$$

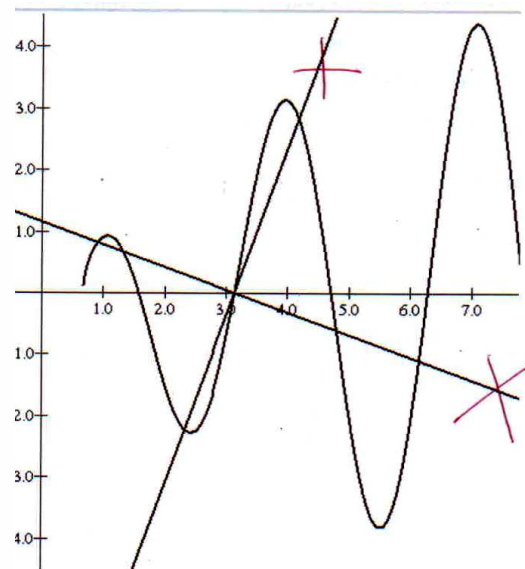


Figura 2 – Solución presentada por el alumno B

² El nombre del alumno B fue reservado por cuestiones éticas.

El alumno C, por su parte, no percibió a través de la solución gráfica, que el punto escogido no pertenecía a la función, como muestra la figura 3.

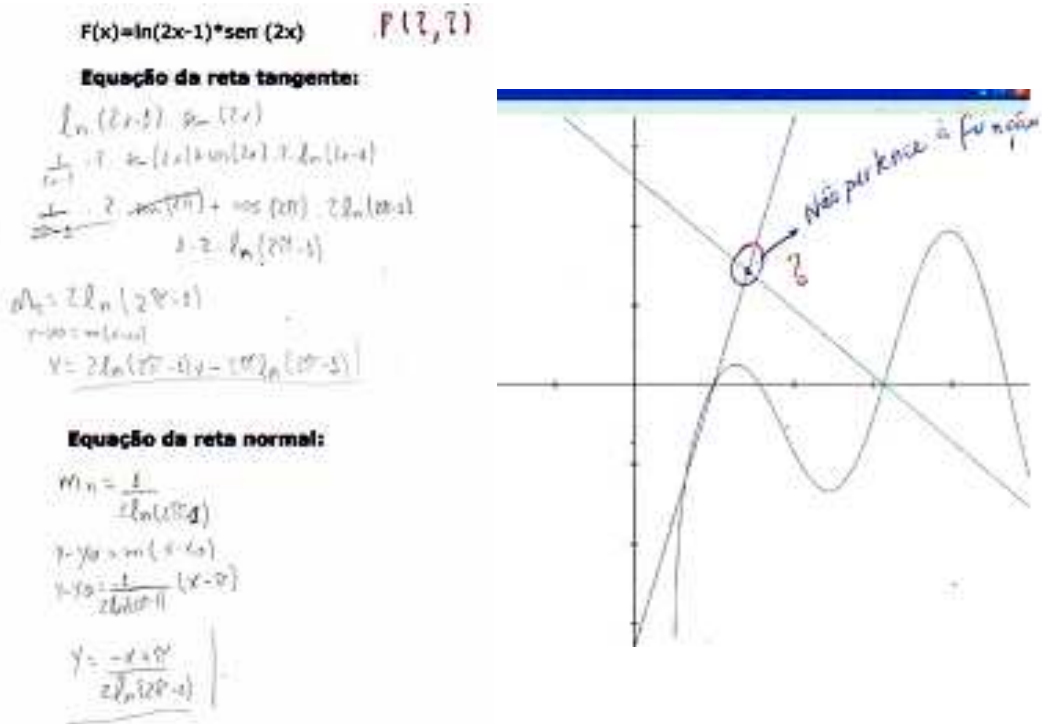


Figura 3 – Solución presentada por el alumno C

CONSIDERACIONES FINALES

Delante de las soluciones presentadas por los estudiantes, algunos cuestionamientos surgen en nuestra práctica docente respecto al papel de la tecnología en la enseñanza del Cálculo Diferencial e Integral para los alumnos de Ingeniería. En algunos casos analizados la representación gráfica obtenida a través del *Software* Winplot es tan parecida con la correcta que el alumno no consigue reconocer las incoherencias.

Así, yendo al encuentro de Dall'Anese (2006), cuyos estudios relacionados al uso de la tecnología en el proceso de aprendizaje de la Matemática, muestran que el ordenador es una herramienta que facilita la visualización de contenidos abstractos trabajados en sala de aula.

En ese contexto, la tecnología es apuntada como una herramienta promisoría para la discusión y dominio pleno de esos conceptos. Es muy importante destacar en esa discusión, el trabajo de Barufi, Boscaino e Nieto (2004) que presenta la utilización de herramientas tecnológicas posibilitando establecer situaciones que exploran no solo la creatividad, si no también el sentido común, situaciones en las cuales el conocimiento construido por los estudiantes es evaluado y valorizado, adquiriendo una dimensión mas significativa.

El uso de un *software* gráfico como el Winplot permite al alumno la elaboración de conjeturas a partir de la observación y la reflexión, sin embargo, es necesario promover la utilización de nuevas tecnologías así como desarrollar metodologías de apoyo para que el estudiante repare que en la solución de un determinado problema existen inconsistencias.

BIBLIOGRAFÍA

- BARUFI, M. C.; BOSCAINO, E. G. & NIETO, S. S. (2004). **A tecnologia no ensino da Matemática no Curso de Engenharia: não apenas como ferramenta de execução, mas de investigação.** In: *XXXII Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia*, Brasília. Anais do XXXII Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia 2004. Brasília: Universidade de Brasília, 2004. 1 CD-ROM.
- CANTORAL URIZA, R. & SHAC, H. M. (2000). **Sobre el estatus de la noción de derivada: de la epistemología de Joseph Louis Lagrange al diseño de una situación didáctica.** In *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* [en línea] 2000, 3 (003): [fecha de consulta: 25 de enero de 2008] Disponible en: <<http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=33503302>> ISSN 1665-2436
- DALL'ANESE, C. (2006). **Visual e Analítico: Argumentos e Metáforas para a Taxa de Variação.** In: *III HTEM - Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática*, São Paulo. Anais do III HTEM. São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2006. 1 CD-ROM.
- GOMES, G. H.; NIETO, S. S. & LOPES, C. M. C. (2005). **Um projeto de experiência pedagógica com calouros nos cursos de Engenharia.** In: *III Congresso Internacional de Ensino de Matemática*. Anais do III Congresso Internacional de Ensino de Matemática. Canoas: Universidade Luterana do Brasil, 2005. 1 CD-ROM.
- GOMES, G. H. & VICENTE, S. A. S. (2007). **O uso do software winplot nas aulas de cálculo diferencial para a discussão do conceito de coeficiente angular da reta tangente.** In *XXXV Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia*. Anais do XXXV Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia 2007. Curitiba: UnicenP, 2007. 1 CD-ROM.
- JESUS, A. R. de; SANTOS, M. M. G. Visualizando Funções com o Winplot. Disponível em: <<http://www.sbm.org.br/bienal/>> Acesso em: 23/05/2007
- VICENTE, S. A. S. ; GOMES, G. H. ; MENDES, L. T. R. ; THEOPHILO JUNIOR, R. . (2005) **Avaliação da Disciplina de Software Aplicado à Engenharia com a Utilização do Matlab.** In: Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia - COBENGE, 2005, Campina Grande - Paraíba. Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia – COBENGE.