ICME 11 Mexico 2008
11th International Congress on Mathematical Education

O papel de técnicas instrumentais no ensino e aprendizagem de integrais múltiplas usando Maple

Afonso Henriques

Universidade Estadual de Santa Cruz (Brasil)

henry@uesc.br

O PAPEL DE TÉCNICAS INSTRUMENTAIS NO ENSINO E APRENDIZAGEM DE INTEGRAIS MÚLTIPLAS USANDO MAPLE

Afonso Henriques
Universidade Estadual de Santa Cruz UESC, Bahia - Brasil
henry@uesc.br

1. INTRODUÇÃO

O presente artigo apresenta um recorte de nossa tese em Didática da Matemática (Henriques, 2006), que teve como objetivo compreender melhor as dificuldades encontradas pelos alunos, com o cálculo de *áreas* e de *volumes* por *Integrais Múltiplas* (*IM*), bem como estudar em que medida a utilização de um Software de Cálculos Avançados (CAS) como o *Maple* pode ajudar a superar essas dificuldades, favorecendo as interações entre Representação Gráfica (RG) e Representação Analítica (RA) de sólidos nos problemas de cálculo de volumes por *IM* envolvendo CAS. É de notar que o cálculo de volume de um sólido delimitado por superfícies de equações conhecidas, utilizando uma integral tripla, por exemplo, é uma prática institucional que passa necessariamente por descoberta de uma representação analítica do tipo $Q = \{(x,y,z), a \le x \le b,\ c \le y \le d,\ m \le z \le n\}$, onde os limites, de ao menos, uma variável devem ser necessariamente constantes, uma se exprime como uma função integrável da primeira, e a outra como uma função das outras duas. A Representação Gráfica de *Q* e sua a leitura, supõem a discriminação das variáveis visuais pertinentes e a percepção das variáveis de sua *RA*. Em geral, tal descoberta é necessária na realização de toda tarefa referente a integrais definidas, adequada ao domínio de realização, que seja uni (para $\int \boldsymbol{f(x)}\mathbf{d}\boldsymbol{x}$), bi (para $\iint \boldsymbol{f(x,y)}\mathrm{dA}$) ou tridimensional (para $\iiint \boldsymbol{f(x,y,z)}\mathrm{dV}$). A coordenação entre esses registros de representação funciona como elemento de controle no processo heurístico de cálculo de integrais. Mas, essa coordenação é ausente nas praticas de estudantes.

O nosso interesse por esse assunto deve-se a nossa experiência como professor na UESC, bem como das discussões entre colegas e alunos, quando surgiu a constatação empírica de diversas dificuldades sobre o ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral (CDI), particularmente sensíveis nos cálculos de *áreas* e de *volumes* por *IM*. Tais dificuldades atingem os alunos, principalmente na resolução dos problemas e parece faltar meios de controle e de validação daquilo que eles fazem. Na intenção de atenuar tais dificuldades surgiu a idéia de utilizar o

Maple. Contudo, as tentativas mostravam que esse ensino era difícil e problemático. A partir dessas constatações surgiram duas questões iniciais, uma relativa às vantagens e dificuldades que os CASs, em especial o *Maple* traria para o ensino das *IM* e, a outra, como incorporá-lo utilmente nesse ensino e com que modalidade didática?

No Brasil, as iniciativas de utilização de CAS vêm sendo realizadas, nas últimas décadas, por vários pesquisadores. Contudo, tais iniciativas encontram-se isoladas e no estado de inovação, nas práticas de docentes, na medida em que a inclusão das novas tecnologias no ensino não é efetivamente institucionalizada na maior parte das instituições do ensino superior brasileiro (basta ver os currículos dos cursos). Na França, em particular, nas instituições de Classes Preparatórias Tecnológicas (CPGE), por exemplo, encontramos um contexto próximo do ensino de *IM* desenvolvido nas universidades brasileiras, além disso, o software *Maple* é instalado e reconhecido institucionalmente. Esses pontos de partida, entre outras idéias mais elaboradas, que podemos encontrar na tese citada, motivaram trazer a tona a problemática que resumimos a seguir.

2. PROBLEMÁTICA

Nos cursos de CDI, uma das práticas institucionais preliminares ao cálculo das *IM* é o *estudo das Integrais Simples* (*IS*) *e o estudo de Funções de Várias Variáveis* (*FVV*). No primeiro estudo (*IS*), aparecem as primeiras técnicas de integração. Algumas dessas técnicas servem para calcular: *áreas de superfícies planas* e *volumes;* de *sólidos de revolução*; por *seções transversais* e por *anéis cilíndricos*. No segundo estudo (*FVV*), quanto a ele, podemos citar práticas sobre: *leitura de propriedades*; *descrição do domínio de uma função*; *representação gráfica*; *continuidade de uma função*; *derivação parcial*; etc. A princípio, essa prática é desenvolvida isoladamente, examinando uma única função em cada problema.

A passagem para o ensino e aprendizagem de *IM* é acompanhada com analogias e com mudanças ou rupturas em relação ao lugar ocupado para as funções e suas representações gráficas. Nessa passagem, uma função não será mais examinada de uma forma isolada. Na maioria dos casos de resolução de problemas, uma função interagirá com outras funções para formar um domínio de integração, que é um sólido resultante de uma *RG* e/ou *RA* no espaço. Essas representações tomam outro aspeto no ensino de *IM* em relação aos estudos precedentes. Os alunos vão ser confrontados com novos tipos de exercícios e com novas técnicas de cálculos de integrais em conjunto com as *RG* no espaço. A princípio, essas representações são operacionalmente difíceis a realizar com as técnicas tradicionais de representação no ambiente *papel/lápis*. Mas também a utilização de um ambiente computacional como o *Maple* necessita da construção de processos de instrumentação das ferramentas do software no tratamento dos exercícios propostos aos alunos.

Dessa problemática e, apoiando-nos sobre a *teoria da instrumentação*, proposta por Rabardel (1995), partimos da hipótese que: *para o aluno ser bem sucedido nesse ensino, utilizando o Maple, é necessária, além dos conhecimentos dos comandos pertinentes do software e de suas sintaxes, a aprendizagem de técnicas instrumentais específicas. Essa aprendizagem deve ocorrer na instituição onde vivem o objeto do saber em questão e o referido software*.

3. QUADRO TEÓRICO

Para conduzir a nossa pesquisa, escolhemos, entre as teorias da didática francesa, o quadro teórico constituído por três abordagens: a *teria da instrumentação*, citada acima, proveniente de pesquisas em ergonomia cognitiva e referentes à aprendizagem de ferramentas tecnológica, permitiu-nos analisar o software *Maple* enquanto instrumento na realização de atividades matemáticas e compreender melhor o papel de seus recursos no ensino de *IM***.** Para estudar as questões colocadas no contexto institucional, em particular, as CPGE (na França) e a UESC (no Brasil), baseamo-nos na *teoria antropológica da didática* (*TAD*) proposta por Chevallard (1991). Como a noção de *IM* revela vários registros de representação, interessamo-nos também com o quadro teórico proposto por Duval (1993), permitindo o estudo de registros de representações nas técnicas instrumentais no *Maple* e/ou no *papel/lápis*. Nesse artigo, não desenvolvemos esse quadro, porém ao longo da nossa discussão, daremos referências a ele. Para uma apresentação detalhada, sugerimos consultar Chevallard (1992), Bosch (1994), Henriques (2007).

A nossa problemática e o nosso quadro teórico permitiram-nos elaborar seis questões de pesquisa, entre as quais estudamos inicialmente as três (3/6) seguintes:

Q1: *Qual é a organização matemática relativa ao cálculo de IM na UESC (Brasil) e nas CPGE (França)?* ***Q2:*** *Como as representações gráficas e analíticas de sólidos são apresentadas nessa organização? Como interagem os dois tipos de representações nas práticas de cálculo de volumes por IM?* ***Q3:*** *Quais são as práticas que emergem nessas instituições sobre as IM e suas relações com o ambiente computacional Maple?*

Apoiando-nos ainda sobre os trabalhos de Lagrange (2000), estudamos as relações entre objetos manipulados pelo software *Maple* e os objetos *ostensivos* e *não-ostensivos* das práticas matemáticas relativas a geometria analítica no espaço e as *IM*. A co-existência das três teorias na pesquisa proporcionou a busca de respostas a essas questões, entre outras que emergiam ao longo da nosso trabalho.

4. METODOLOGIA

Decompusemos o nosso estudo em cinco partes constituídas por: *um estudo teórico de referências da didática francesa*; *uma análise institucional do ensino de IM*; *uma análise de práticas dos alunos e de professores sobre as IM (pré-experimentação); uma análise do ambiente computacional Maple e de livros didáticos de utilização desse ambiente, e por fim, um estudo experimental em duas etapas*.

A *análise institucional* permitiu identificar: as condições e as exigências institucionais sobre a organização matemática de *IM*; a relação institucional com o *Maple* e as práticas que emergem nas instituições com esse ambiente. A *pré-experimentação* foi realizada no Brasil e consistiu numa primeira investigação sobre o ensino de *IM* e nas eventuais dificuldades encontradas pelos alunos nesse ensino. Tal investigação não foi feita com a ótica de obter informações do tipo estatístico sobre capacidades dos alunos, mas na perspectiva de uma observação local de suas práticas sobre o assunto. A *análise do ambiente computacional Maple*, por sua vez, permitiu-nos identificar as ferramentas disponíveis, suas *potencialidades* e seus *entraves* em relação ao ensino visado. Com esse estudo, foi possível recensear os objetos manipulados pelo software em relação aos *objetos ostensivos* e *não-ostensivos* do trabalho matemático sobre *IM*. Isso permitiu a construção da técnica instrumental, que chamamos *Crivo-Geométrico,* necessária no processo de cálculo de integrais, além de servir como elemento de controle nesse processo. Finalmente a fase *experimental* permitiu-nos, a partir de um exemplo de cálculo de volume por *IM*, analisar as práticas dos alunos em duas etapas, em que na primeira observamos suas práticas quando utilizam apenas o *ambiente papel/lápis* e na segunda o *ambiente computacional*.

Para respondermos às três primeiras questões apresentadas acima, desenvolvemos uma análise de programas e de livros didáticos com suportes na abordagem *ecológica* do quadro da *teoria antropológica da didática*. Nesse artigo apresentaremos alguns resultados obtidos nessa análise, cujo objetivo foi o de *identificar o tipo de exercícios de Integrais Múltiplas e as organizações matemáticas e didáticas nas quais este objeto do saber entra em jogo***.** Mais adiante, apresentaremos as outras três questões dessa pesquisa.

5. ANÁLISE DE PROGRAMAS E DOS LIVROS DIDÁTICOS

Essa análise foi centrada nos programas das duas instituições (CPGE e a UESC, cf. Henriques, 2006). Analisamos alguns livros didáticos, dando a nossa atenção a dois deles. O primeiro é um livro muito utilizado nas universidades brasileiras e o outro por estudantes nas universidades francesas. Dessa análise, obtivemos os seguintes resultados: nos dois livros, aparecem três nichos[1] "*nicho analítico, nicho geométrico e nicho físico*" possíveis para as *Integrais Múltiplas*.

O *nicho da análise* é um *nicho estrutural* na medida em que as *Integrais Múltiplas* vêm completar um programa de estudo, no qual elas reforçam a coerência, de acordo com um esquema em duas partes (*funções de uma*, em seguida de *várias variáveis reais*) e três tempos (*definição*, *cálculo diferencial*, *cálculo integral*). Além disso, as *Integrais Múltiplas* exercem funções de cálculos de áreas de superfícies e volumes de sólidos. Neste contexto, elas alimentam-se, via gráficos, de modos de representação e de raciocínio geométrico, para ocupar um *nicho geométrico*, que é um *nicho interpretativo*. Por último, as *Integrais Múltiplas* servem para calcular momentos de inércia, massas e várias noções procedentes da física. Encontramos aqui funções de *IM* que revelam o que chamamos de *nicho "físico"* que é um *nicho*

[1] Na abordagem *ecológica* Chevallard (1991) define o *habitat* como sendo o lugar de vida e o ambiente conceitual de um objeto do saber. Trata-se essencialmente, de objetos com os quais interage, mas também das situações de ensino nas quais aparecem as manipulações e experiências associadas. O *nicho ecológico* descreve, quanto à ele, o lugar funcional ocupado pelo objeto do saber no sistema ou *praxeologia* dos objetos com os quais interage.

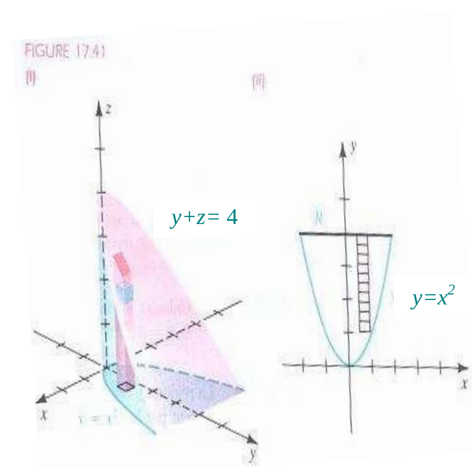
aplicativo. Entretanto, a vida do *nicho estrutural de Análise* é reduzida, em cada um dos dois livros, pelas seguintes razões: *ausência das demonstrações dos teoremas*; *ausência das integrais generalizadas e das técnicas de convergência*; *ausência de exercícios dedicados a esse nicho*. Nos dois livros, é o *nicho geométrico* que é o mais buscado através dos vários exercícios e exemplos ilustrando os cálculos de áreas e de volumes. As organizações, tanto matemáticas quanto didáticas, nos dois livros, são semelhantes. Tanto em um quanto no outro, o ensino de *IM* baseia-se numa analogia com as *Integrais Simples*, continua com o estudo das *Integrais Duplas* e se generaliza com o estudo das *Integrais Triplas*.

Constatamos ainda, nessa organização, que no tipo de exercício "*calcular a integral*" um subtipo aparece em grande número de exemplares, e alimenta o *nicho geométrico* que é o mais designado, e representa assim um *exercício emblemático*: Trata-se de: *cálculo de volume de um sólido delimitado por superfícies dadas por equações.*

Neste tipo de exercício, a maioria dos problemas resolvidos nos livros dá, no início da solução, uma *RG* dos sólidos isolados, feitos no computador, sem que seja explicada a maneira como foram realizados. Para ilustrar essa constatação, eis um exemplo, do tipo *emblemático*, de um dos livros analisados.

Calcule o volume do sólido delimitado pelo cilindro $y = x^2$ e pelos planos $y+z=4$ e $z=0$.

A solução proposta no livro começa por:



Esse sólido é dado na figura (i). A figura (ii) mostra a região R de integração no plano-*xy*. O teorema (17.19) com $f(x,y,z)=1$ conduz aos seguintes cálculos:

$$V=\int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4}\int_{0}^{4-y} dz\,dy\,dx=\int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4}\left[z\right]_{0}^{4-y} dy\,dx$$

$$=\int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4}(4-y)\,dy\,dx=\int_{-2}^{2}\left[4y-\frac{1}{2}y^2\right]_{x^2}^{4} dx$$

$$=\int_{-2}^{2}(8-4x^2+\frac{1}{2}x^4)\,dx=\left[8x-\frac{4}{3}x^3+\frac{1}{10}x^5\right]_{-2}^{2}=\frac{256}{15}\approx 17.$$

O teorema 17.19 é a seguinte equação algébrica $\iiint_Q f(x,y,z)\,dV=\iint_R\left[\int_{k_1(x,y)}^{k_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right]dA$ que precede esse exemplo no curso.

Desse exemplo, pudemos destacar três *registos de representação* freqüentes no ensino de *Integrais Múltiplas*: *registro gráfico, analítico e algébrico*. Desse destaque emergem as seguintes perguntas: *Como são construídos os gráficos produzidos no computador? Como é feita a coordenação entre os três registros?*

É interessante sublinhar que o *exercício emblemático* contêm também exercícios que podem ser resolvidos com as técnicas próprias das *Integrais Simples* (sólidos de revoluções, seções transversais, anéis cilíndricos, apontadas anteriormente). Entretanto, essas técnicas são *apagadas* na organização das *IM* por efeito do *contrato didático* e das *exigências institucionais* que impõem a mobilização dos conhecimentos próprios de *IM* e das técnicas que podemos chamar de *transformação de volume por Integrais Duplas* (*ID*) e *transformação de volume por Integrais Triplas* (*IT*).

O processo de estabelecer uma integral constitui uma fase de modelização didática de problemas de cálculos de integrais. Contudo, essa modelização possível de um problema parece implícita no ensino de *IM*. Além disso, observamos que a *RG* ocupa um grande espaço nesse ensino, mas ela é do domínio do professor. Ela não é transformada em exercícios explícitos com *praxeologias* associadas. A obtenção de um *sólido isolado* é escondida do aluno, na medida em que faltam técnicas explícitas que permitem obter esse tipo de sólidos. O que parece é que o autor do livro didático espera que o aluno *leia* (ou que *reproduza*) os gráficos presentes no livro. Enquanto que nos exercícios que lhe são propostos, este deve produzir, por si, esse tipo de gráficos e utilizá-los na modelização do problema. Observamos que a articulação entre *Representação Gráfica* e *Analítica* não é trabalhada. Contudo, esta articulação exerce um papel importante na conceitualização bem como na modelização de *IM*, considerando os conhecimentos geométricos dos objetos em causa, as variáveis visuais dos gráficos e as simbólicas.

A partir desses resultados podemos nos questionar se *os alunos produzem sólidos no tratamento desse tipo de exercícios? Se sim, como os produzem? Como fazem a escolha entre uma integral tripla, dupla ou mesmo, uma integral simples para resolver esse tipo de exercícios?* Desenvolvemos uma análise aprofundada em torno dessas interrogações ocupando os capítulos C e E da nossa tese, partindo da seguinte hipótese: *para resolver o exercício emblemático, o aluno deve produzir uma* *representação gráfica do sólido* "*isolado*"*.* Contudo, essa produção, não é objeto de um ensino explícito e, é problemática. Como não é ensinada, nem são ditas as técnicas utilizadas para obtê-las, resolvemos estudar como esta etapa pode ser desenvolvida com auxílio do software *Maple*. E que tipo de técnicas são necessárias? As três questões (3/6) abaixo completam as seis mencionadas anteriormente, e guiaram a etapa subseqüente da nossa pesquisa.

> ***Q4**: Que ferramentas são disponíveis no Maple relativas: (**a**) à geometria analítica no espaço? (**b**) ao cálculo de IM? (**c**) às interações entre (**a**) e (**b**)? **Q5**: Como as técnicas de resolução de certos exercícios são modificadas com a utilização de tais ferramentas? **Q6**: Como o aluno se apropria dessas ferramentas nos problemas de cálculos de volumes por IM?*

Para responder a essas questões, desenvolvemos uma análise do software *Maple* numa perspectiva ergonômica da *abordagem instrumental*. Analisamos também os livros didáticos sobre o uso desse ambiente, que mostra o lugar bastante reduzido ocupado pelo cálculo de *IM* nesse livros, o que significa, entre outros fatores, que poucos autores abordam o tema em questão. Nosso pesquisa preocupou-se ainda com o estudo das práticas dos alunos e de professores sobre as *IM* (pré-experimentação com alunos da UESC), desenvolvemos um estudo experimental em duas etapas, finalizando a pesquisa com duas experimentações: uma sem e a outra com o uso do *Maple*, nas CPGE em Grenoble-França.

A análise dos protocolos dos alunos mostra que o registro gráfico é predominante nas suas práticas no ambiente *papel/lápis* em detrimento do registro analítico. Contudo, ao seguir esse caminho, os alunos encontram dificuldades para produzir os gráficos que precisam para interpretar, compreender e resolver os problemas de cálculo de Integrais. Com efeito, a conversão entre o registro gráfico e o registro analítico dos sólidos, parece difícil e problemática. Em geral, os alunos tratam esses registros de forma independente. Essa independência não lhes permite produzir elementos de controle suficientes para estabelecer uma integral. Todavia, para esses alunos parece claramente que, ter uma *RG* é essencial no tratamento dos exercícios do tipo emblemático. Podemos, portanto, afirmar que as suas práticas revelam, uma forte relação institucional com as *RG* no cálculo de integrais. De acordo com nossa análise institucional, a *RG* é fortemente presente no ensino, mas os resultados da experimentação mostram que essa representação não é operacional no cálculo de *Integrais Múltiplas*. No que diz respeito às práticas dos alunos no *ambiente computacional*, constatamos a ignorância dos mesmos em relação a utilização adequada das ferramentas do software. Ou seja, falta nos alunos conhecimentos do software para que este seja um instrumento de ajuda no tratamento de exercícios do tipo *emblemática*. Os alunos visualizam bem no espaço, mas as dificuldades existem na conversão e na coordenação entre o que vêem e os correspondentes analíticos que devem ser implementados no *Maple*. Com efeito, na *gênese instrumental* dos alunos, os esquemas de utilização correspondentes não estão ainda construídos, necessitando assim, um forte trabalho institucional em torno do ensino das *Integrais Múltiplas* utilizando o *Maple*.

Apesar das dificuldades encontradas, essa pesquisa constitui um primeiro esboço que pode servir, sobretudo, para os professores que têm a seu cargo as disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral bem como a Geometria e, que vêm a importância de incluir as tecnologias educacionais na Educação Matemática no ensino superior.

Bibliografia

Chevallard, Y. (1999), L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. Recherche en Didactique des Mathématiques, V. 19/2, p. 221-266.

Duval, R. (1993), Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. Annales de didactique et de sciences cognitives. IREM de Strasbourg, v. 5, p. 35-65.

Henriques, A. (2006), L'enseignement et l'apprentissage des intégrales multiples : analyse didactique intégrant l'usage du logiciel Maple. UJF-Grenoble, Lab. Leibniz.

Henriques, A., Attie, J. P., Farias, L. M. S. (2007), Referências teóricas da didática francesa: análise didática visando o estudo das integrais múltiplas com auxílio do software Maple. Educação Matemática Pesquisa, v. 9 – n. 1, São Paulo.

Lagrange J.B. (2000) Etudier les mathématiques avec les calculs symboliques : quelle place pour les techniques. In : GUIN, D. et TROUCHE, L. p. 151-185.

Rabardel, P. (1995), Les hommes et les technologies - Approche cognitive des instruments contemporains, Editions Armand Colin.