ICME 11 Mexico 2008
11th International Congress on Mathematical Education

La derivada como razón de acumulación o agotamiento

Teresa Guadalupe Parra Fuentes
CINVESTAV – IPN (México)
tparra@cinvestav.mx

Francisco Cordero Osorio
CINVESTAV – IPN (México)
fcordero@cinvestav.mx

LA DERIVADA COMO RAZÓN DE ACUMULACIÓN O AGOTAMIENTO

TERESA GUADALUPE PARRA FUENTES, FRANCISCO CORDERO OSORIO
Cinvestav IPN, Av. Instituto Politécnico Nacional 2508 Col. San Pedro Zacatenco
C.P. 07360, México, DF
tparra@cinvestav.mx, fcordero@cinvestav.mx

ABSTRACT

En este escrito reportamos los avances de nuestro trabajo de investigación que consiste en crear un marco de referencia para resignificar la derivada que permita incorporarle significados variacionales que son fundamentales en su epistemología. Tal marco trata de ligar tres aspectos que son: La conservación de la Masa, la derivada en el sentido de Lagrange y la epistemología del Uso de las Gráficas. Todo esto con el objetivo de favorecer en el estudiante un conocimiento funcional, poniendo principal énfasis en los usos del conocimiento a la luz de la Socioepistemología.

Problemática

Con frecuencia escuchamos a los estudiantes preguntándose para qué les sirve aprender matemáticas. Para ellos lo más importante es que ésta satisfaga las necesidades de su vida diaria, llevando de esta forma al conocimiento a un nivel utilitario. Y es de esperarse ya que el estudiante no le encuentra sentido ni significado a la matemática que se le enseña a través de algoritmos y secuenciaciones, lo cual es resultado de que el discurso matemático escolar está fuertemente anclado a los conceptos, y como consecuencia a los algoritmos y fórmulas, tratando de ofrecer a los estudiantes la exactitud y formalismo. Omitiendo las situaciones que permitieron que nazca el conocimiento y que sea manejado con cierta naturalidad, en un ambiente fuera de formalismos en donde el conocimiento lo obtiene el humano a través de su práctica y experiencia.

Como es el caso de la derivada, cuyos orígenes están relacionados a los problemas del movimiento, en respuesta a las necesidades del desarrollo de la sociedad. Pero que sin embargo, esos aspectos relacionados con el movimiento o variacionales, medulares en la epistemología de la derivada no forman parte del conocimiento que el estudiante le incorpora, ya que no son usados en el discurso de los profesores al enseñar ese tema.

Soslayar estas situaciones en las que es puesto en uso el conocimiento y que surja de forma natural, centrándose en formalismos y algoritmos han traído como consecuencia una ausencia de significados para la derivada, que requiere de hacer una reflexión sobre lo que estamos enseñando a los estudiantes, esto es, sobre el discurso matemático escolar.

Desde esta perspectiva podemos ver que hay ausencia de situaciones que le permitan al estudiante usar su conocimiento, que a través de su experiencia construya argumentos para dar sentido a sus procedimientos y de esta forma construir un conocimiento que no esté basado en la memorización sino en su práctica. Haciendo al estudiante participe de su conocimiento y no sólo un espectador, de tal forma que pueda construir una variedad de significados basados en su experiencia (Parra y Codero, 2006).

El centrarse en los conceptos y formalismos, lleva a concebir a la matemática sin sentido encerrada en sí misma, y no apreciar que se va desarrollando y resignificando al paso de la vivencia institucional. Es decir, que en el recorrido escolar la matemática va adquiriendo sentido y significación, en especial la matemática del nivel superior. Ya que esa matemática es aplicada y llevada a un escenario en donde es contextualizada, adquiriendo razón de ser. Este sentido y significado será en función de la actividad humana que desarrolle el dominio que se trate, por lo que al haber una variedad de dominios existe una variedad de resignificaciones.

Sin embargo estos desarrollos y diferentes resignificaciones no se hace evidente, ya que parecería que existe una ruptura entre la matemática y otros dominios científicos, como por ejemplo el dominio de la ingeniería. Omitir estas relaciones obscurece a los estudiantes la funcionalidad[1] de la matemática.

Con todo esto plantemos nuestra problemática de investigación que consiste en la ausencia de Marcos de Referencia en el discurso matemático escolar que permitan resignificar la derivada, esto es, ausencia de situaciones en los que el estudiante ponga en uso su conocimiento y que además den evidencia del desarrollo de la matemática en el sistema didáctico, específicamente nos enfocaremos en la matemática del nivel superior.

La investigación

Sabemos que la derivada en el sentido de Cauchy ha sido privilegiada en el discurso matemático escolar por medio del límite del cociente, habiendo otras concepciones de ella en el transcurso de la historia pero que no han sido consideradas en la enseñanza. Como por ejemplo la que tenía Lagrange, que consiste en el coeficiente del término lineal en el desarrollo de la serie de potencias esta es, $f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2} + f'''(x)\frac{h^3}{3} + \ldots$ Su idea era fundamentar el análisis de manera rigurosa pero lejos de los infinitesimales. Consigue definir las derivadas de una función sin recurrir ni a límites ni a infinitésimos, pero sólo gracias a que supone que toda función se puede desarrollar en serie de potencias en la que no aparecen, además, exponentes irracionales. Nótese el objetivo de la incorporación del residuo en la serie, pues al colocarlo en el desarrollo puede limitar el número de términos de la serie según se requiera y, simultáneamente, tener la garantía de que para valores pequeños de h, cualquier sumando es más grande que la suma de todos los términos que le siguen. Sin lugar a dudas, esto hace de la serie un importante instrumento de uso en una gran diversidad de problemas que, muy particularmente, las ciencias físicas planteaban. De esta manera, vemos que existen otras formas con las cuales presentar el conocimiento y que han sido olvidados, que tienen sus propios fundamentos y su razón de ser, que posiblemente al ser implementados actualmente permitirían avances con respecto a la problemática que estamos viviendo en el proceso enseñanza-aprendizaje de la matemática.

Es por ello que en nuestro trabajo haremos uso de esas otras concepciones del conocimiento que han sido soslayadas como es la idea de Lagrange sobre la derivada, truncando la serie de potencias de acuerdo a lo que nos interesa de la siguiente forma:

$$f(x+h) \approx f(x) + f'(x)h$$

[1] Matemática funcional quiere decir un conocimiento incorporado orgánicamente en el humano que lo transforma y que le transforma su realidad. Todo ello en oposición al conocimiento utilitario.

Por otro lado se puede decir que un logro de la enseñanza habitual del análisis matemático es que los estudiantes deriven, integren, calculen límites elementales sin que asignen un sentido más amplio a las nociones involucradas en su comprensión. Sin embargo aún siendo capaces de derivar una función, no reconocen la necesidad de derivar ante un problema que lo requiera. Lo que nos hace ver que la matemática escolar no logra hacerse un conocimiento funcional en los estudiantes, no se integra a su vida de tal forma que la transforme cambiando su percepción del medio que los rodea.

Si bien a partir de la matemática se han derivado otros campos de conocimiento ahora parecería que hay una ruptura entre ellos. Podemos encontrar en el nivel superior, estudiantes que reprueban materias de matemáticas pero en materias en donde esa matemática es aplicada sus calificaciones mejoran. Lo cual nos da cuenta de que el estudiante no es capaz de percibir que es la misma matemática que está sujeta a un desarrollo y que emplean en un escenario diferente. Cantoral y Farfán dicen al respecto: la matemática del nivel superior está al servicio de otros dominios científicos y de otras prácticas de referencia, donde a su vez adquiere sentido y significación (Cantoral y Farfán, 2003).

Para dar cuenta de esa relación de la matemática con otros dominios científicos, nuestro trabajo consiste en crear un marco de referencia para resignificar la derivada en un dominio diferente a la matemática misma como lo es la ingeniería. Dando cuenta de la relación entre ambos dominios de conocimiento y del desarrollo de la primera hasta adquirir sentido y significado en la segunda. Es por ello que en el dominio de la ingeniería nos centramos en una materia que cursan algunos estudiantes (porque no es cursada en todas las ingenierías) que es Mecánica de Fluidos, específicamente en el tema Conservación de la Masa.

La conservación de la masa es una de las leyes básicas que rigen el movimiento de un fluido. Es expresada en función de un sistema, un conjunto fijo de partículas de un material. Sin embargo, el interés se concentra con más frecuencia en un dispositivo, o una región del espacio, en el cual entra el fluido y/o desde el cual sale, identificada como un volumen de control. Una de las razones es que como los medios fluidos son capaces de una distorsión y una deformación continuas, a menudo es en extremo difícil identificar y seguir la misma masa de fluido todo el tiempo (como debe hacerse para aplicar la formulación del sistema) (Fox y McDonald ,1993).

La figura I nos muestra ejemplos de 3 sistemas que circulan a través de un volumen de control.

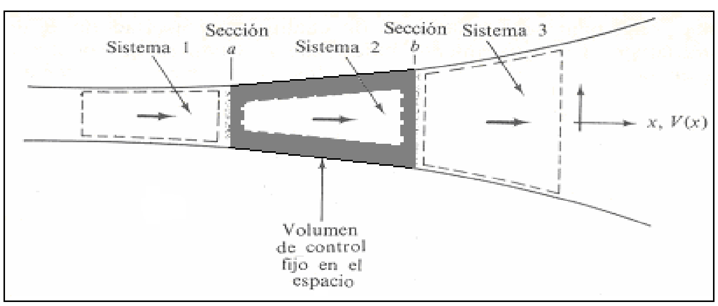


Figura I

Podemos ver, que la relación que existe entre ellos es que el volumen de control se mantiene fijo y por él circulan los sistemas, que están en movimiento.

La conservación de la masa establece simplemente que la masa, M, del sistema es constante, planteándose como:

$$\frac{DM_{sistema}}{Dt} = 0$$

La masa de un sistema permanece constante

Por la dificultad de seguir los sistemas se tiene que encontrar una transformación que permita expresar la derivada sustancial del sistema en función de cantidades asociadas con un volumen de control.

Por ello interesa expresar esta ley establecida para un sistema en términos de un volumen de control, que se establece de la siguiente forma:

$$\left.\frac{dM}{dt}\right)_{sistema} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho d\forall + \int_{SC} \rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

Igualándolo a cero que nos representa que las variaciones de la cantidad de masa son nulas, tenemos

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho d\forall + \int_{SC} \rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

Esta transformación, basándose en los conceptos físicos, se puede establecer en palabras:

$$0 = \begin{bmatrix} \textit{gasto másico} \\ \textit{que sale del} \\ \textit{volumen de control} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \textit{gasto másico} \\ \textit{que entra al} \\ \textit{volumen de control} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \textit{rapidez de cambio} \\ \textit{de la masa dentro} \\ \textit{del volumen de control} \end{bmatrix}$$

De esta forma se puede decir que para conservar la masa, la razón de cambio con respecto al tiempo de la masa en el volumen de control más la razón de flujo neto de masa a través de la superficie de control debe se igual a cero. En realidad, el mismo resultado se obtiene más directamente igualando la razón de flujo de masa hacia dentro y hacia fuera del volumen de control a las razones de acumulación y agotamiento de masa dentro del volumen de control (Munson et al, 1999)

Esta formulación física la describimos en términos de la serie de potencias:

$$f(x+h) \approx f(x) - f'(x)h$$

En donde:

$f(x+h)$ es el gasto másico que sale del volumen de control.

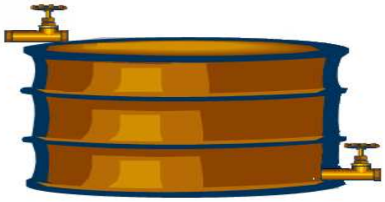
$f(x)$ es el gasto másico que entra al volumen de control

$f'(x)h$ es la rapidez de cambio de la masa dentro del volumen de control

Nuestro trabajo trata de enlazar los dos elementos señalados anteriormente dentro de la epistemología del Uso de las Gráficas, en la cual se establece a la graficación como generadora de conocimiento. Esta perspectiva dista de la que ha ofrecido el discurso matemático escolar, en donde, la graficación es considerada como representación, como una alternativa para dar sentido a procedimientos algebraicos. En donde no se considerada la idea de que a través de la reflexión sobre ésta, se pueden encontrar factores medulares que le permitirán por sí misma llevar al estudiante a usar su conocimiento, para lo cual tendrá que haber un *funcionamiento* y una *forma*. Es decir que para que haya un uso del conocimiento debe haber un objetivo o un funcionamiento, que será abordada a través de una situación específica o forma. Con esto tratamos de manifestar que además de los procedimientos algebraicos, que han sido privilegiados en el discurso matemático escolar, la graficación puede llevar al estudiante a incorporar significados a sus procedimientos que puede ser reflejado en sus argumentos alejados de formalismos y basados en su propia experiencia. Y de esta forma favorecer un conocimiento funcional.

Marco de referencia

Con base a estas ideas planteamos una situación didáctica, que inicia presentando al estudiante un contenedor o volumen de control con una entrada y una salida, como se muestra a continuación:



A partir de esta idea, se proponen 5 situaciones:

La primera es una introducción para que el estudiante establezca la correspondencia entre las manipulaciones de las llaves con lo que sucede en el volumen de control a través de una gráfica. Se les pide que tracen las gráficas que representen el registro de la cantidad de agua acumulada de acuerdo a la siguiente situación: *Si la llave de entrada se encuentra más abierta que la llave de salida y se empieza a cerrar de tal forma que quede más cerrada que la de salida y nuevamente se vuelva a abrir hasta superar a la llave de salida.* Siendo la relación: Manipulación $\rightarrow$ gráfica.

La segunda tiene como objetivo que el estudiante reconozca la *acumulación* o *agotamiento* que se realiza en pequeños intervalos de tiempo, esto es, cuánto creció o decreció la cantidad de masa en el volumen de control de un instante a otro. Para lo cual necesita conocer dos estados: la cantidad de masa en el volumen de control en algún momento y un instante después, cuya diferencia dará la acumulación o agotamiento en ese instante. Observándose que al crecer la cantidad de fluido en el volumen de control entonces habrá una acumulación, por lo que la gráfica de las diferencias será positiva; y cuando decrece habrá un agotamiento por lo que la gráfica de las diferencias será negativa. Se les pide que realicen un bosquejo de estas cantidades con respecto a las gráficas que trazaron en la situación anterior.

En la tercera se presentan al estudiante gráficas como las que trazaron en la situación 2 que corresponden a diferencias, es decir, gráficas sobre la acumulación o agotamiento, que corresponden a la derivada. Teniendo como finalidad que los estudiantes confronten las gráficas de las diferencias con las manipulaciones de las llaves, esto es, cómo tendrían que ser éstas últimas para obtener las gráficas que se les dan. Entre las cuales están:

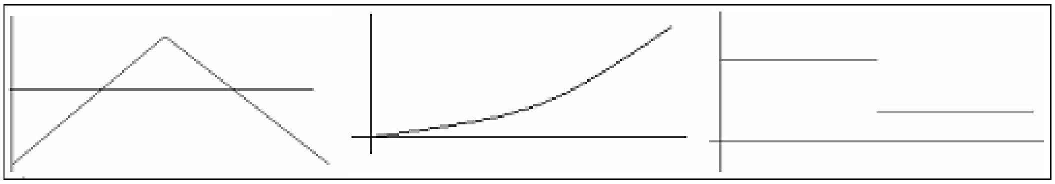


Figura II

De esta forma la relación de las manipulaciones de las llaves con la gráfica se dará en sentido contrario al del inicio, esto es: Gráfica $\rightarrow$ Manipulaciones

En la cuarta se espera que el estudiante establezca la conservación de la masa de forma implícita, esto es, que establezca las relaciones entre los datos dados que estarán regidos por la misma conservación de la masa. Ya que se tiene que cumplir que la cantidad que sale menos la cantidad que entra sea igual a la cantidad acumulada en ese instante. Para ello se presentan al estudiante 3 columnas como las que se muestran en la figura 8, en las que se dan 2 datos y él tiene que establecer el tercero, usando las gráficas como un medio argumentativo para tal fin.

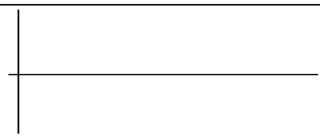
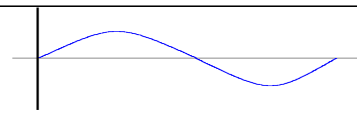
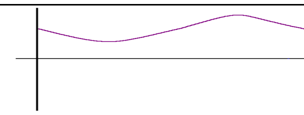
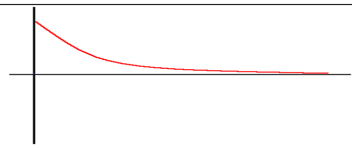
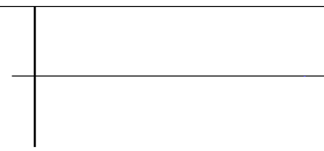
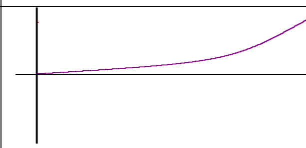
Flujo de entrada	Acumulación o agotamiento	Flujo de salida
		
		

Figura III

La última situación tiene como finalidad que el estudiante establezca la conservación de la masa a través de la expresión lineal de la serie de Taylor, esto es, $f(x+h)=f(x)+(-f'(x)h)$. Esto es, que identifique una cantidad primitiva o flujo de entrada de la cual se van a derivar las demás. Para ello se le guía por medio de preguntas sobre gráficas que se le muestran sobre flujo de entrada, acumulación instantánea y flujo de salida con el fin de que establezca las diferentes relaciones que existen entre ellos.

Resultados

Esta secuencia didáctica ha sido aplicada a estudiantes de ingeniería, profesores, estudiantes de maestría en matemática educativa y de licenciatura en enseñanza de las matemáticas. Actualmente nos encontramos en la fase de análisis de los datos. Entre los resultados hallados hasta el momento destacan dar sentido a las gráficas de la acumulación o agotamiento, que corresponde a la derivada con base a dos estados: la entrada y la salida de flujo. Así como incorporar significado a los puntos máximos, mínimos, cero, a los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la gráfica de la derivada que se manifiesta en sus argumentos. Por ejemplo, en los puntos donde la acumulación es cero identifican que es cuando coinciden el flujo de entrada y salida; cuando hay un máximo es porque hay un cambio en las llaves, es decir, que la llave de entrada de estarse abriendo empieza a cerrarse pero sin superar a la llave de salida; y en el caso de un mínimo es porque la llave de salida de estarse abriendo se empieza a cerrar pero sin superar la llave de entrada. Por otro lado la secuenciación de las situaciones permite que el estudiante establezca la conservación de la masa, utilizando como argumento las operaciones con las gráficas.

Conclusiones

Queremos hacer notar que en el diseño de la situación se trabaja con la derivada sin hacer referencia a expresiones algebraicas, ni al concepto de función. Tratando que el estudiante desarrolle las nociones de variación que son fundamentales en la epistemología de la derivada y que es soslayado por el discurso matemático escolar. En un escenario en el cual puede construir argumentos y significados con base en su experiencia y en una situación usual, usando las gráficas como argumentos para realizar sus procedimientos.

Referencias

- Cantoral R. (2001). Matemática Educativa. *Un estudio de la formación social de la analiticidad.* México, D. F., México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 6(1), 27-40.
- Cantoral, R. y Farfán, R. (2004). La sensibilité à la contradiction: Logarithmes de nombres négatifs et origine de la variable complexe. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 24 (2-3), 137-168.
- Cantoral, et al. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Número especial, pp. 83 – 102
- Marcolini, M & Perales, J. (2005). La Noción de Predicción: Análisis y Propuesta Didáctica para la Educación Universitaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Vol 8. pp (25-68)*
- Mirón, H. (2000). *Naturaleza y posibilidades de aprendizaje en una ambiente tecnológico: una exploración de las relaciones* f *y* f' *en el bachillerato interactuando con calculadoras gráficas.* Tesis doctoral, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.
- Munson, B.; Young, D; Okiishi, T. (1999) *Fundamentos de Mecánica de Fluidos*. Ed. Limusa, Wiley.
- Parra, T. y Cordero, F. (2007) El Uso de las gráficas en la mecánica de fluidos. El caso de la derivada. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 20. México: Grupo Editorial Iberoamérica
- Rosado, P. (2004). *Una resignificación de la derivada. El caso de la linealidad del polinomio en la aproximación socioepistemológica.* Tesis de maestría no publicada, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.