ICME 11 Mexico 2008
11th International Congress on Mathematical Education

Una perspectiva epistemológica para la noción de tangente

Carlos Rondero Guerrero

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo (México)

rondero@uaeh.reduaeh.mx

Oleksandr Karelin

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo (México)

skarelin@uaeh.reduaeh.mx

Anna Tarasenko

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo (México)

anataras@uaeh.edu.mx

J. Alberto Acosta Hernández

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo (México)

acostah@uaeh.reduaeh.mx

UNA PERSPECTIVA EPISTEMOLÓGICA PARA LA NOCIÓN DE LA TANGENTE

Carlos Rondero Guerrero, Oleksandr Karelin, Anna Tarasenko, J. Alberto Acosta Hernández
rondero@uaeh.reduaeh.mx, skarelin@uaeh.reduaeh.mx, anataras@uaeh.edu.mx, acostah@uaeh.reduaeh.mx

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, ICBI, CIAII – CIMA, México

Resumen

Las nociones de límite y derivada de una función en un punto dado, son difíciles de comprender por parte de los alumnos de bachillerato y licenciatura. Las dificultades se encuentran precisamente en las definiciones de estas nociones, no tanto en la aplicación de las reglas formales ni en el uso de las fórmulas correspondientes.

El estudio de la recta tangente es un problema básico en el cual se refleja gran parte de la problemática del aprendizaje del cálculo. En esta dirección, hemos venido construyendo un tratamiento novedoso, en que se presenta un enfoque no tradicional en la búsqueda de la recta tangente para gráficas de funciones elementales, sin el uso de la derivada, lo que permite profundizar sobre las nociones fundamentales del cálculo y la comprensión de la dependencia lineal y no lineal: crecimiento, decrecimiento, puntos críticos, concavidad, simetría, pendiente de la recta tangente y sus articulaciones conceptuales.

Se muestra una conexión entre la búsqueda de los puntos mínimos y máximos y el cálculo de la derivada de una función. Después en base a la interpretación geométrica de la concavidad, se propone hallar la derivada en un punto de algunas funciones simples.

Algunos de los resultados previamente estudiados con el mismo método fueron obtenidos sólo para funciones cóncavas o cuando la pendiente *m* es igual a cero.

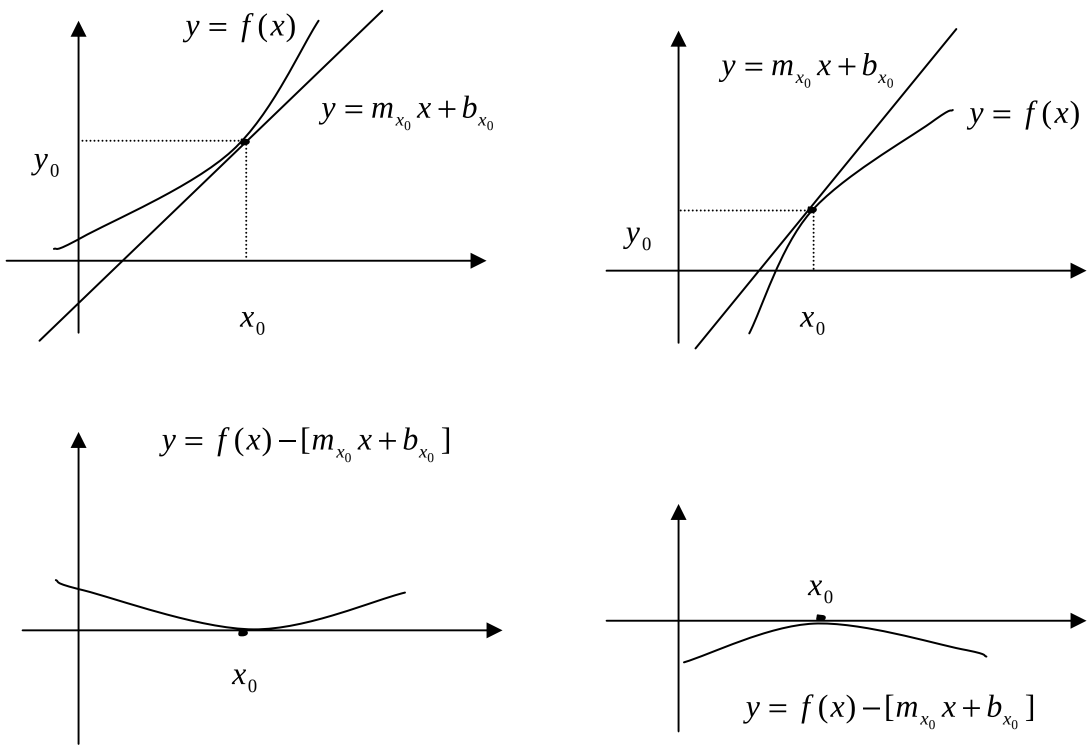
Ahora se propone una generalización del método para el cálculo de la reta tangente de diferentes tipos de funciones elementales en puntos de inflexión y cuando $m \neq 0$. El procedimiento se basa en ideas de simetría para poder construir una función auxiliar cóncava que tiene la misma pendiente de la función original a la que se le aplica el esquema anteriormente señalado.

Este método nos ayuda a relacionar la derivada de una función en un punto dado con los puntos mínimos y máximos. El manejo de tales técnicas puede ayudar a los estudiantes de matemáticas de diferentes niveles educativos a asimilar métodos de análisis sobre características gráficas de las funciones. Su puesta en escena se ha hecho con estudiantes de maestría en matemática educativa para evidenciar aspectos geométricos y analíticos que complementan el estudio de la derivada y sus aplicaciones.

No queremos sustituir los métodos clásicos, pero proponemos un enfoque alternativo que posibilite al estudiante entender mejor las nociones básicas del cálculo a través de métodos no tradicionales para analizar el comportamiento de las funciones.

MÉTODO PROPUESTO PARA FUNCIONES CÓNCAVAS

Definición:
Consideremos las funciones $y = f(x)$ con $x \in D,\ D = [a,b]$ para las cuales en cada punto (x_0, y_0) , $x_0 \in D$ de su gráfica $L:\{(x, y(x))\}$ existe una y sólo una recta $R(x_0, y_0): y = m_{x_0} x + b_{x_0}$ que pasa por el punto (x_0, y_0), no tiene otros puntos comunes con la gráfica L y está ubicada arriba o abajo con respecto de la recta $R(x_0, y_0)$. La clase de tales funciones vamos a denotar con C. La clase de tales rectas para una función $y = f(x)$ vamos a denotar como $T(f)$ y llamarles rectas tangentes.



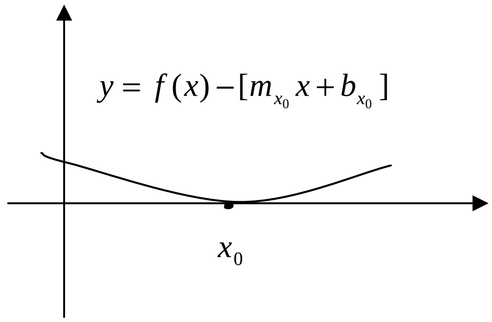
Afirmación 1:
Sea $y = f(x)$ una función de la clase C y un punto (x_0, y_0), tal que $y_0 = f(x_0)$.

> **Una recta $R(x_0, y_0): y = m_{x_0} x + b_{x_0}$ es de la clase $T(f)$ (es recta tangente) para la función $y = f(x)$ en el punto, si y solo si, la función auxiliar $y = F(x)$, $F(x) = f(x) - [m_{x_0} x + b_{x_0}]$ tiene su punto mínimo ò punto máximo en $x = x_0$.**

Tenemos dos casos

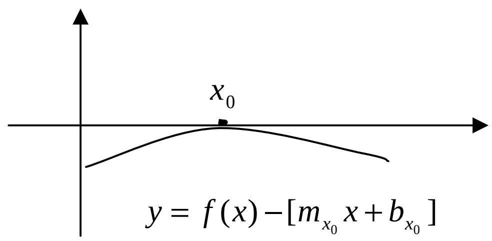
a) El punto $x = x_0$ es un **punto mínimo** para $y = F(x)$, entonces se cumple la desigualdad

(*) $F(x) \geq F(x_0)$ **o** $f(x) - [mx_{x_0} + b_{x_0}] \geq f(x_0) - [m_{x_0} x_0 + b_{x_0}]$



b) El punto $x = x_0$ es un **punto máximo** para $y = F(x)$ entonces se cumple la desigualdad

(**) $F(x) \leq F(x_0)$ **o** $f(x) - [m_{x_0} x + b_{x_0}] \leq f(x_0) - [m_{x_0} x_0 + b_{x_0}]$



Una recta $R(x_0, y_0): y = m_{x_0} x + b_{x_0}$ es de la clase $T(f)$ (es recta tangente) en el punto (x_0, y_0) para $y = f(x)$, si y solo si, la desigualdad (*) ò (**) se cumple en una vecindad de $x = x_0$.

Para construir la recta tangente $R(x_0, y_0): y = m_{x_0} x + b_{x_0}$ es necesario hallar m_{x_0} de (*) o de (**) y calcular b_{x_0} con la siguiente fórmula

$$b_{x_0} = f(x_0) - m_{x_0} x_0 \qquad (1)$$

La fórmula (1), sigue del hecho que (x_0, y_0) es el punto común de la recta $y = m_{x_0} x + b_{x_0}$ y de la gráfica de la función $y = f(x)$:

$$\begin{cases} y_0 = m_{x_0} \cdot x_0 + b_{x_0} \\ y_0 = f(x_0) \end{cases},$$

por lo tanto $f(x_0) = m_{x_0} x_0 + b_{x_0}$

Si m_{x_0} es un número tal que la desigualdad (*) o (**) se cumple alrededor de $x = x_0$, entonces $x = x_0$ es un punto mínimo ó máximo para $y = F(x)$ y m_{x_0} es la pendiente de la recta $R(x_0, y_0)$.
Para saber si una función $y = f(x)$ pertenece a la clase C, es útil aplicar la siguiente afirmación.

Afirmación 2:
Cualquier función que tiene las tres propiedades:

1. Se cumple la igualdad para la función auxiliar $F(x_0) = 0$

   $f(x_0) = m_{x_0} x_0 + b_{x_0}$ (2)

2. Si para la función $y = f(x)$ existen constantes m_{x_0}, b_{x_0} tal que se cumple la desigualdad para la función auxiliar $F(x) > F(x_0)$

   $f(x) - [m_{x_0} x + b_{x_0}] > 0$ (3)

   o la desigualdad

   $f(x) - [m_{x_0} x + b_{x_0}] < 0$ (4)

   en una vecindad de $x = x_0$, excepto x_0

3. La constante m_{x_0} es única , esto es si $m \neq m_{x_0}$, entonces no existe una vecindad V_{x_0}, de $x = x_0$ excepto x_0., tal que se cumple la desigualad $f(x) - [m_{x_0} x + b_{x_0}] > 0$ o $f(x) - [m_{x_0} x + b_{x_0}] < 0$

es de clase C.
Usando esta conexión entre los puntos mínimos y máximos y la recta tangente de una función se propone hallar la derivada de algunas funciones simples.

MÉTODO PROPUESTO PARA FUNCIONES CON PUNTOS DE INFLEXIÓN

Sea $y = f(x)$ una función con el punto de inflexión en (0,0).
Si la función auxiliar $y = F(x),\quad F(x) = f(x) - mx$ para un numero m tiene en (0,0) la recta tangente $y = 0$, entonces la recta $y = mx$ recibe el nombre la recta tangente para la función $y = f(x)$ en el punto (0,0).

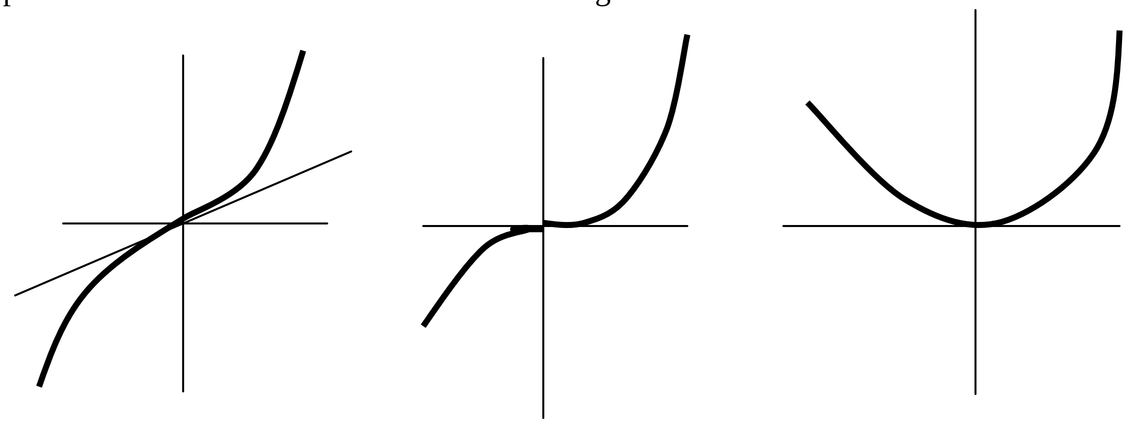
Definición:

Sea $y = f(x)$ una función con el punto de inflexión en (0,0).
Si la función transformada $y = \tilde{F}(x)$ para la función auxiliar
$y = F(x),\quad F(x) = f(x) - mx$ es

$$y = \tilde{F}(x), \quad \tilde{F}(x) = \begin{cases} F(x), & x \geq 0 \\ -F(x), & x < 0 \end{cases}$$

para un número m (es cóncava) y tiene en $(0,0)$ la recta tangente $y = 0$, entonces la recta $y = mx$ recibe el nombre la recta tangente para la función $y = f(x)$ en el punto (0,0).

Explicamos nuestro método en la forma visual – gráfica.



$y = f(x)$ $\qquad$ $y = F(x)$ $\qquad$ $y = \tilde{F}(x)$

Consideramos que el punto de inflexión de la función $y = f(x)$, esta en el origen, la función auxiliar, $y = F(x)$, $F(x) = f(x) - mx$, tiene pendiente cero y no es cóncava, por lo que no es posible aplicar el método descrito. Construyendo la función transformada,

$y = \tilde{F}(x)$, $\tilde{F}(x) = \begin{cases} F(x), x \geq 0 \\ -F(x), x < 0 \end{cases}$, con el uso de la simetría con respecto del eje-x, ésta función ahora ya es cóncava y por tanto el método propuesto ya se puede aplicar.

Bibliografía

1. Boyer, C. y Merzbach, U.(1989). *A History of Mathematics*, Nueva York: John Wiley.
2. Edwards, C. H.(1979). *The Historical development of the Calculus*, Nueva York: Springer-Verlag.
3. Howard, E. (1990). *An introduction to the History of Mathematics*, 6a, ed. Nueva York: Sanders.
4. Kline, M. (1972). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Nueva York: Oxford University Press.
5. Stewart, J. (1999).Calculus; *Early Transcedentes*, International Thomson Pub. Inc 1999.
6. Rondero, C., Karelin, O., Tarasenko, A. (2004). Métodos alternativos en la búsqueda de puntos críticos y derivadas de algunas funciones. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. (Volumen 18, pp. 821-828), México: CLAME.
7. Karelin, O., Rondero, C., Tarasenko, A. (2005). Propuesta didáctica sobre la construcción de la recta tangente sin el uso de la derivada. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. (Volumen 19, pp.386-392), México: CLAME.
8. Karelin, O., Rondero, C., Tarasenko, A. (2007). La construcción de la recta tangente en puntos de inflexión: un método alternativo en la articulación de saberes. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. (Volumen 20, pp.198-203), México: CLAME