Reflexiones sobre la enseñanza de los métodos de prueba para los estudiantes del colegio y las dificultades encontradas por los estudiantes.

Louise Maurice PhD Didáctica de Matemáticas

Los métodos de prueba enseñados son: prueba condicional y bicondicional, prueba por inducción, prueba incluyendo cuantificadores « para todo » y « existe », método por contradicción, el método contrapuesto y las pruebas de unicidades. Uno de los desafíos es construir un curso conforme a las teorías constructivistas. ¿Cuáles son los elementos matemáticos que un enseñante debería considerar para preparar los estudiantes a que comprendan estos métodos? ¿En qué orden presentaré a la clase estos tipos de prueba? ¿Cuáles son los contenidos escogidos por el enseñante? Los estudiantes encuentran varias dificultades para cada método de prueba que aprenden. Hacer la diferencia entre la hipótesis y la conclusión, utilizar la hipótesis de inducción, construir un objeto matemático, descubrir una contradicción y hacer la diferencia entre las pruebas de unicidades son ejemplos de las dificultades que los estudiantes tienen.

INTRODUCCIÓN

El objetivo de este documento es de compartir una experiencia de enseñanza de los métodos de prueba para los estudiantes del colegio. La primera parte concierne a la enseñanza de los métodos. Para organizar la enseñanza, el enseñante debe escoger los métodos, descubrir el mejor orden para presentarlos y preparar a los estudiantes para afrontar las principales dificultades. La segunda parte es la descripción de las dificultades de los estudiantes cuando analizan, completan y escriben una prueba.

ENSEÑANZA DE LOS MÉTODOS DE PRUEBA

Preliminares para aprender los métodos de prueba.

El objectivo de la primera parte de la enseñanza es preparar los estudiantes para aprender los métodos de prueba. Por eso, un estudiante debe aprender a hacer la diferencia entre la hipótesis y la conclusión y debe verificar la presencia de la expresión « entonces ». Normalmente, la hipótesis es escrita antes de esta expresión y la conclusión después. Sin embargo, aunque parezca fácil hacer la distinción, en las ecuaciones algunos estudiantes pueden confundir la hipótesis y la conclusión.

Mientras que los estudiantes tratan de hacer esta diferencia, el enseñante introduce tablas de certeza, de conjunción, disyunción, negación, tautología, contradicción, además de proposición condicional y proposición bicondicional. Por ejemplo, utilizando tablas de certeza o álgebra de proposiciones, un estudiante debe demostrar que una proposición es lógicamente equivalente a otra proposición, o que es una tautología, o que es una contradicción. El enseñante muestra las tablas de certeza de proposiciones condicional, inversa, recíproca y contrapuesta, para sostener el objetivo de hacer la diferencia entre la hipótesis y la conclusión,

En la misma parte del curso, el contenido es principalmente de álgebra y de geometría. El enseñante da ejemplos de lemas, corolarios y axiomas. El contenido es principalmente de álgebra y de geometría. También muestra la demostración de una proposición utilizando otra proposición o utilizando una definición (lo que es difícil para los estudiantes). Para dar énfasis a este objetivo, el enseñante se inspira en la teoría de Solow (2005) que introduce la idea de “pregunta clave” y “respuesta a la pregunta clave”. Esta manera pedagógica en la que el estudiante se cuestiona (y escribe) “¿Cómo mostrar esta conclusión?” Con ello responde a la pregunta (y escribe la repuesta) utilizando una definición, una proposición o cualquier propiedad que conoce. El enseñante da a los estudiantes una lista de definiciones para utilizar durante el curso y los exámenes. Cada definición o proposición lleva al estudiante a otra conclusión que debe mostrar.

Para preparar los estudiantes a comprender los métodos de prueba, el enseñante presenta dos cuantificadores “existe” y “para todo” ya que estos aparecen frecuentemente en las definiciones. Los estudiantes analizan el enunciado escrito después del cuantificador; identifican el objeto, la propiedad y la consecuencia de la misma manera que Solow (2005). Para preparar los estudiantes a los métodos de contrapuesto y de contradicción, los estudiantes deben hacer ejercicios sobre la negación de los enunciados que contienen estos cuantificadores.

Métodos de prueba y orden de presentarlos

Es posible agrupar el método de inducción y el método de prueba que contiene el cuantificador “para todo”. Los ejercicios sobre este último método están relacionados con el cálculo, las funciones y la teoría de conjuntos de los números. Los ejercicios relacionados con el método de inducción son principalmente sobre la teoría de conjuntos de los números y el cálculo.

El método de prueba que contiene el cuantificador “existe” dificulta la comprensión de los estudiantes; estos ejercicios deberían ser fáciles puesto que son un repaso de problemas de cálculo que los estudiantes resolvieron durante la primera parte del semestre en el colegio.

Algunos manuales presentan el método de inducción antes de otros métodos de prueba. ¿Es más fácil para los estudiantes? El enseñante introduce el método concerniente al cuantificador “existe” o al “método constructivista” antes del primero grupo (“para todo”) para que los estudiantes se familiaricen con el contenido de cálculo.

El método de contradicción y el método contrapuesto se enseñan después de los dos primeros grupos (“existe” y “para todo”) porque es necesario que los estudiantes puedan hacer la negación de un enunciado conteniendo los cuantificadores “existe” o “para todo”. Sin embargo, algunos manuales introducen estos métodos sin presentar los métodos de prueba relacionados con los cuantificadores.

En la última parte del curso, el enseñante introduce los métodos de unicidades. En el método indirecto, los estudiantes utilizan el método de contradicción. En los métodos indirecto y directo, es necesario el “método constructivista”.

Este orden es escogido para respetar las teorías constructivistas de la didáctica.

Contenidos escogidos

En esta parte, para cada tipo de prueba, se presentan ejemplos de ejercicios que los estudiantes deben hacer. Los estudiantes deben completar una prueba que contiene explicaciones o detalles que faltan, corregir errores o escribir una prueba.

Los ejercicios sobre el teorema de Rolle y sobre el teorema del valor medio, en los que es necesario descubrir un valor real, son ejemplos relacionados con el "método constructivista". Al mismo tiempo, es la ocasión de revisar los conceptos de continuidad y de diferencial. El "método constructivista" está también presente cuando los estudiantes deben demostrar que una expresión algébrica es par, impar o racional.

Los ejercicios relacionados con las pruebas que contienen el cuantificador "para todo" o el "método de elección" son los que los estudiantes deben mostrar tal y como están enunciados: "Para todo valor real de un conjunto, una función o una sucesión es creciente o decreciente." Los estudiantes utilizan la noción de derivación.

Demostrar que la suma de series, una desigualdad o una expresión es divisible por un número son algunos ejemplos de pruebas relacionadas con el método de inducción. El conocimiento de álgebra es muy útil en esta parte.

Hay también ejercicios donde los cuantificadores "para todo" y "existe" están entrelazado. Se pueden presentar dos posibilidades: la primera, en la conclusion, el cuantificador "existe" aparece antes que el cuantificador " para todo" y la segunda, es el contrario. En cálculo, hay varios ejercicios que son relacionados con estas situaciones. Como ejemplo de la primera situación, "Sea una sucesión, existe un valor real k, con para todo n > 1, entonces la sucesión es convergente con el termino k". En la segunda situación "Sea una función f(x), para todo número real de un intervalo, existe un número real de un otro intervalo, f(x)=y".

El contenido relacionado con los métodos de contrapuesto y de contradicción es variado. El estudiante puede mostrar que un número es irracional, que una expresión no es divisible por un número, que un número no es la solución de una ecuación, que una función es inyectiva y que un número es par o impar. Normalmente, estos métodos son utilizados cuando la conclusión es fácil de negar.

Por último, en álgebra lineal, existen varios ejemplos de los métodos de unicidades: mostrar que una combinación lineal de vectores linealmente independientes es única y que la solución de un sistema de ecuaciones lineales es única. Es posible también encontrar algunos ejemplos en cálculo para mostrar que si un límite existe, entonces es único y basándose en la teoría de los números, el estudiante puede mostrar que el mayor divisor común de dos números enteros es único.

La primera etapa para escoger el contenido de la prueba es de hacer una revisión de cálculo y de álgebra lineal. Normalmente, en los cursos de cálculo los enseñantes no tienen tiempo para hacer demostraciones porque están mas preocupados por enseñar el álgebra. La segunda etapa es escoger un nuevo contenido (como nuevas teorías de gráficos y de números) que podría profundizar los métodos de prueba enseñados en el curso.

DIFICULTADES DES LOS ESTUDIANTES

Esta sección se divide en dos partes: la primera parte describe las dificultades de los estudiantes en las preliminares y la segunda describe sus dificultades en los métodos de prueba.

Preliminares y dificultades de los estudiantes

Normalmente, cuando los estudiantes leen el enunciado de una proposición, son capaces de identificar la hipótesis y la conclusión. Sin embargo si deben mostrar una ecuación o una inecuación, algunos estudiantes comienzan la prueba con las dos partes simultáneamente (el lado izquierdo y el lado derecho) de la expresión en lugar de comenzar con un lado primero (de la ecuación o de la inecuación) y probar llegar al otro lado utilizando las propiedades, las definiciones y los teoremas.

La utilidad de una definición o de un teorema para demostrar una proposición es difícil para muchos estudiantes. Durante las primeras semanas del curso, los estudiantes desarrollan la reacción de consultar su lista de definiciones y deben reformular la conclusión según la definición escogida. La utilización de un teorema para probar una proposición es más difícil y sin embargo aún con la explicación de varios ejemplos, algunos estudiantes no comprenden. La mayoría de los problemas de los estudiantes, radican en formular la conclusión (para probar) como la hipótesis del teorema, y en la acepción que la prueba (de la proposición) está terminada cuando la hipótesis está probada.

Generalmente, las tablas de certeza son fáciles para los estudiantes y prefieren validar una proposición con ellas o con el álgebra de proposiciones. El análisis de los cuantificadores no parece causarles mayores dificultades.

Métodos de prueba y dificultades de los estudiantes

Las dificultades de los estudiantes en el “método constructivista” consisten en que el objeto se presenta al principio de la prueba y la prueba es la verificación que el objeto induce a la conclusión. Para evitar este problema, los estudiantes deben escribir la prueba, comenzando por el final es decir por la conclusión, y descubrir el objeto o la solución como lo hacían en el curso de cálculo (como para los teoremas de Rolle y de Lagrange). A veces, un borrador puede ayudarles a descubrir el objeto de la prueba que contiene el cuantificador “existe”.

El otro tipo de prueba, que contiene el cuantificador “para todo” engendra dificultades porque los ejercicios están relacionados con la teoría de conjuntos y los estudiantes no tienen familiaridad con ella. Aún cuando los elementos de conjuntos se escriben como expresiones algébricas o interval, los estudiantes no logran entender ni los conjuntos ni el “método de elección”. Muchos estudiantes son incapaces de utilizar la hipótesis de inducción en este método. Se faltan conocimientos en álgebra y tienen dificultad para substituir la expresión algébrica de la hipótesis de inducción (para n) en la expresión algébrica que deben mostrar (para n+1). De otra manera, tienen también problemas para modificar la expresión que deben probar (para n+1) para utilizar la hipótesis de inducción (para n).

En los métodos de contrapuesto y de contradicción puesto que los estudiantes ya hicieron ejercicios de negación de un enunciado, se puede decir que son capaces de escribir la hipótesis adecuada. Las mayores dificultades observadas están relacionadas con el método de contradicción. La manera en que los estudiantes escriben la contradicción es a menudo inhábil, porque no tienen el vocabulario exacto para explicarla o porque tienen dificultades con el álgebra. El método de contrapuesto parece más fácil para los estudiantes, porque ya saben cuál es el enunciado que deben probar, es decir, la negación de la hipótesis. Como saben lo que deben demostrar, muchos estudiantes pueden utilizar una argumentación inadecuada o a veces un poco dudosa.

En los exámenes realizados, para hacer una demostración, los estudiantes no debían escoger entre el método de contradicción o el contrapuesto, ni entre los métodos de unicidades directo o indirecto, el método correcto era sugerido de antemano en la pregunta. El método de unicidad directo es más fácil de aplicar que el indirecto, para hacer una demostración con el método indirecto se necesita la utilización del método de contradicción. Como el contenido de las pruebas es relativamente nuevo, los estudiantes tenían más dificultades con el contenido matemático que con la forma de estos métodos.

Los estudiantes también tenían problemas para completar una prueba en la que faltan detalles; eran incapaces de identificar en la etapa de la demostración dónde está el detalle que falta y generalmente volvían a escribir la demostración sin completarla.

CONCLUSIÓN

Muchas de las dificultades descritas sugieren un problema mayor ya que muchos estudiantes tienen problema para establecer relaciones entre dos conceptos matemáticos. Al final del curso, pocos estudiantes desarrollaron esta habilidad. Algunos elementos explicativos de sus dificultades serian ligados al significado que los estudiantes dan a los términos y símbolos matemáticos. Utilizar a un “conocimiento matemático anterior”, escoger un “conocimiento matemático del mismo contexto” o la interferencia del “sentido común” con la definición de algunos términos matemáticos, podrían ser explicaciones para las dificultades de los estudiantes (Maurice, 2000). Este texto es una discusión sobre una segunda experiencia de enseñanza de los métodos de prueba; las reflexiones representan solamente una tentativa. Sería necesario elaborar un estudio completo sobre la enseñanza de los métodos de prueba para comprender mejor las dificultades de los estudiantes.

Louise Maurice PhD
Didáctica de Matemáticas
Enseñante de Matemáticas pre-universitaria
www.reflets.ca
lmaurice@cegepsth.qc.ca

Gracias a la Señora Luisa Velásquez por su ayuda en la traducción de este texto.

Referencias

Maurice, L. (2000). *Les idées d'élèves du collégial à propos des limites de fonctions rationnelles faisant intervenir zéro et l'infini*. Thèse de doctorat, Université Laval, Canada.

Solow, D. (2005). *How to Read and Do Proofs*. Fourth Edition, John Wiley & Sons, Inc.